

**THÈSE**

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Lilia MEHIDI**

sous la direction de Christophe BAVARD

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES - GÉOMÉTRIE

---

**Points conjugués des tores lorentziens**

---

Soutenue le 02 décembre 2019 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

après avis de :

M. Francesco BONSANTE	Université de Pavie	Rapporteur
M. Abdelghani ZEGHIB	ENS de Lyon	Rapporteur

et devant le jury de thèse composé de :

M. Christophe BAVARD	Université de Bordeaux	Directeur de thèse
M. Abdelghani ZEGHIB	ENS de Lyon	Rapporteur
M. Thierry BARBOT	Université d'Avignon	Examineur
M. Laurent BESSIÈRES	Université de Bordeaux	Examineur
M. Pierre MOUNOUD	Université de Bordeaux	Examineur
M. Jean-Marc SCHLENKER	Université du Luxembourg	Président du jury

## Remerciements

Bien évidemment, c'est à Christophe Bavard que vont mes premiers remerciements. Il a été pour moi, depuis le début de mon M2, et durant toute ma thèse, un mentor remarquable. Il m'a montré comment construire mon intuition mathématique, comment prendre du recul, comment rédiger de manière claire... Je lui suis profondément reconnaissante pour sa disponibilité à discuter et à répondre à mes questions, d'abord comme enseignant sur les différents cours, puis comme directeur de thèse. Je garderai d'agréables réminiscences de nos discussions ; ses réponses et la manière qu'il a de relier des objets venant d'univers totalement différents m'ont souvent inspirée. Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par sa gentillesse et son soutien qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Il m'est parfois arrivé au cours de ma thèse d'être démotivée ; mais, toujours, en sortant de son bureau, j'étais de nouveau confiante et prête à creuser de nouveau, après son légendaire « je suis optimiste ! ».

Je tiens ensuite à remercier Abdelghani Zeghib et Francesco Bonsante pour avoir accepté (malgré un emploi du temps chargé) de rapporter cette thèse, et pour la qualité de leur lecture. Je remercie Bonsante pour la liste de corrections et commentaires qu'il m'a transmise, et grâce à laquelle la rédaction de ce manuscrit s'est vu améliorée. Je suis particulièrement admirative devant le travail que Zeghib accomplit en Algérie afin de créer une école de mathématiques dans le pays.

C'est un grand honneur que me font Pierre Mounoud, Laurent Bessières, Thierry Barbot et Jean-Marc Schlenker en acceptant d'être membres de mon jury de soutenance, et je les en remercie vivement. J'aimerais plus particulièrement remercier Pierre Mounoud pour les échanges bénéfiques que nous avons eus durant ma thèse, et en particulier quelques jours avant ma soutenance ; il est à l'origine de l'exemple 2.1.17 de ce manuscrit.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes enseignants de l'université de Bordeaux et de l'université de Bejaia pour nous avoir formés et transmis, chacun à sa manière, un peu de leur passion pour les mathématiques et le goût de la recherche. En particulier, mes enseignants de géométrie depuis la L3, qui ont façonné mon orientation vers ce domaine des mathématiques. Je pense à Christophe Bavard, Pierre Mounoud, Laurent Bessières, Vincent Koziarz et Duc-Manh Nguyen. Je remercie également mes enseignants de l'université de Bejaia : Mehidi, Dahmani, Tas, Berboucha, Benmeziane, Farhi, et Bedhouche avec qui j'ai fait des maths du collège jusqu'aux premières années de l'université.

Je remercie l'équipe de géométrie de l'Université de Bordeaux pour la qualité du travail proposé et pour l'ambiance conviviale qui y règne.

Je tiens à remercier Michel Matignon et Elizabeth Strouse pour leurs encouragements durant mes premières années à Bordeaux. J'adresse aussi un grand merci à Ahmed Sebbar pour son soutien de manière générale, pour avoir, avec beaucoup d'humilité, partagé avec ma soeur et moi son expérience personnelle en mathématiques, et pour son mot d'encouragement la veille de ma soutenance.

Une pensée à toute ma famille, dont le soutien durant toutes mes études m'a procuré beaucoup de joie. Je remercie particulièrement tonton Nordine, qui, au delà d'être un oncle formidable, a contribué pour beaucoup dans ma formation mathématique et dans le choix de vie que j'ai fait assez tôt ; les vacances d'été à Amizour à faire des maths avec lui et mes cousins font partie de mes meilleurs souvenirs. Il m'a prodigué les meilleurs conseils, et son encouragement durant ma thèse m'a été indispensable. Je remercie aussi tonton Madjid chez qui on a partagé à Amizour de grands moments avec toute la grande famille réunie ; ses séances d'exercices à son local à Cité Tobal m'ont été d'un grand enseignement. Un grand merci à tata Nadia qui est peut-être la personne qui croit en nous (ma soeur et moi) plus que n'importe qui d'autre, elle a été depuis toujours une tante

extraordinaire et un soutien hors pair. Merci à tata Noria pour sa gentillesse et ses encouragements malgré la distance, et pour les délicieux gâteaux qu'elle a confectionnés spécialement pour mon pot de thèse ; elle fait les meilleurs gâteaux au monde. Une pensée également à tous mes oncles, tantes, cousins et cousines paternels et maternels. J'ai de la chance d'avoir des cousins uniques au monde : Mourad, Amina, Meriem, Anis, Karim, Lynda, Mabrouk, ainsi que tous mes petits cousins. Je leur dédie cette thèse.

Merci à mes amis et compagnons de route, Bianca et Stéphane, qui ont rendu cette aventure inoubliable. A Bianca pour sa bonne humeur au quotidien, son sourire lumineux et son goût de l'aventure qui m'a souvent inspirée ; à Stéphane pour nos discussions de fin de journée, pour son humour, et pour avoir égayé le Bureau 305D de sa présence. Vous me manquez beaucoup. Une pensée à Valentin et Gabrielle que j'ai rencontrés cette année et que j'ai encore le temps de côtoyer ; je leur souhaite de belles années de thèse. Une pensée aussi bien sûr à tous les doctorants/collègues avec qui je n'ai pas eu la chance de discuter aussi souvent pendant mes années de thèse, mais que je n'oublie pas pour autant.

J'ai une profonde pensée pour mes amis de longue date : Kenza, ma meilleure amie depuis toujours, une âme authentique comme il y en a peu ; Salim, nos premières conversations autour de devinettes et énigmes mathématiques se sont muées en profonde amitié, merci de m'avoir tant appris ; Hamza, le berger grincheux qui cherche son étoile et qui pense que les mathématiques ne sont qu'une partie de la physique. Une pensée aussi bien sûr à Sid Ali avec qui j'ai partagé une année à Bordeaux et des discussions mathématiques enrichissantes, et à Bilal qui a souvent égayé ma journée de sa bonne humeur et de son énergie. Je leur souhaite à tous de s'épanouir dans leurs projets et de réussir. Une pensée enfin pour Nouredine à qui je souhaite, parce que je sais qu'il le peut, de faire ce qu'il aime.

Une pensée pour Lydia, l'une des premières personnes que j'ai rencontrées à Bordeaux ; son cœur grand comme la mer a si souvent adouci le mien. Une pensée particulière à Karima et Hamida, deux belles âmes aux multiples talents (culinaires notamment), qui rendent le quotidien loin de la famille moins difficile. A Sandra aussi, une fille drôle et sympathique qui est rapidement devenue une très bonne amie. Un grand merci à Badredine, pour sa gentillesse et pour les discussions, mathématiques ou non, que nous avons pu avoir autour d'un café à l'IMB ; je le remercie d'être venu d'aussi loin pour assister à ma soutenance (nos projets de faire des footings et des parties de foot ou de tennis n'ont jamais vu le jour). Merci aussi à Kader d'être venu à ma soutenance ; je lui souhaite beaucoup de réussite. Je remercie enfin Youcef (Youyou) pour ses mots d'encouragement, et parce qu'il a eu la gentillesse de me corriger mon orthographe kabyle. Merci à Ayoub, pour nos discussions mathématiques et philosophiques.

Enfin, à mes parents, les personnes les plus importantes de ma vie. Leur présence à mes côtés a souvent été déterminante ; je dois à leur soutien infini les plus belles choses qui me sont arrivées. Je remercie mon père qui a été depuis toujours mon exemple de courage ; je tiens de lui mon envie d'apprendre, pour l'avoir vu depuis toujours « s'étonner de tout ». Je remercie ma mère qui a tout fait pour moi, qui, durant mes années d'études, a veillé tard pour me tenir compagnie lorsque j'en ai eu besoin. Merci parce que vous avez tant porté sur vos épaules afin que les miennes soient plus légères.

A Sara, ma PETITE sœur préférée, une petite perle qui a été pour moi mon premier et mon plus beau cadeau de la vie (tu ne risques pas de lire cela ailleurs !). Sa présence à mes côtés est réconfortante et m'est indispensable. Je lui dédie cette thèse.

i vava d yemma,

Ay aħviv, ad ak-weşiy gher wid ħemley, ayen ara ad-ak iniy, ttxil-ik eħku-asen-t.

Fellak i ttekley, wama nek setħay, ayen ara ak-iniy, ttxil-ik ssiweđ-asen-t.

Ini-asen ad akun-yeħrez rebi a lwaldin i ħemley, yenya-kun aħebber felli,

ur seiγ wiyad am kunwi.

Ini-as i vava, a vava txeđmeđ lxiř akken ad-t-afey, sber d nif deg-k i ten-walay,

tmennađ iyi ad awđey lebyi-w ad neğħey deg lecyal-iw.

Ini-as i yemma, a yemma aezizen, ulac di dunit am irebbi-ynem, yelli-m xas tuyal

d tametut, d elđufan yef yirebbi-m.

Saramey-awen tazmert n tzemmut d tezyi n leemer.

## Résumé

Dans la première partie de cette thèse, nous donnons une description des surfaces lorentziennes simplement connexes et maximales dont le groupe d'isométries est de dimension 1 (c'est-à-dire possédant un champ de Killing complet), à l'aide d'une variété riemannienne de dimension 1 (généralement non séparée) et d'une fonction lisse définie dessus ; nous étudions ensuite la complétude géodésique de telles surfaces.

Dans la deuxième partie qui est la partie principale de cette thèse, nous donnons une infinité de nouveaux exemples de surfaces lorentziennes compactes *sans points conjugués*. De plus, nous étudions l'existence et la stabilité de cette propriété parmi les métriques lorentziennes admettant un champ de Killing. Nous obtenons une nouvelle obstruction et prouvons que le tore de Clifton-Pohl et certains de nos exemples sont aussi stables que possible. Cela montre que, contrairement au théorème de Hopf riemannien, l'absence de points conjugués dans le cadre de Lorentzian n'est ni "spéciale" ni rigide.

MOTS CLÉS : Points conjugués, équation de Jacobi, champ de Killing, extensions universelles, complétude, espace des métriques lorentziennes.

## Abstract

In the first part of this thesis, we give a description of simply connected maximal Lorentzian surfaces whose group of isometries is of dimension 1 (i.e. with a complete Killing field), in terms of a 1-dimensional generally non-Hausdorff Riemannian manifold and a smooth function defined there. Next, we study the geodesic completeness of such surfaces.

In the second part which is the main part of this thesis, we give infinitely many new examples of compact Lorentzian surfaces *without conjugate points*. Further, we study the existence and the stability of this property among Lorentzian metrics with a Killing field. We obtain a new obstruction and prove that the Clifton-Pohl torus and some of our examples are as stable as possible. This shows that in contrast with the Riemannian Hopf theorem, the absence of conjugate points in the Lorentzian setting is neither "special" nor rigid.

KEY WORDS : Conjugate points, Jacobi equation, Killing field, universal extensions, completeness, space of lorentzian metrics.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Géométrie des surfaces lorentziennes admettant un champ de Killing</b>	<b>17</b>
1.1 Classification des tores lorentziens munis d'un champ de Killing . . . . .	17
1.2 Extensions universelles des tores avec un champ de Killing . . . . .	21
<b>2 Surfaces simplement connexes complètes avec champ de Killing</b>	<b>27</b>
2.1 Espace des feuilles . . . . .	28
2.2 Correspondance entre surfaces maximales et variétés étalées . . . . .	37
2.3 Complétude géodésique . . . . .	40
2.3.1 Complétude des géodésiques restant dans une bande . . . . .	41
2.3.2 Constante de Clairaut critique associée à un ruban . . . . .	44
2.3.3 Résultats généraux de complétude . . . . .	48
2.3.4 Exemples et contre-exemples . . . . .	50
<b>3 Construction de tores lorentziens sans points conjugués</b>	<b>55</b>
3.1 Description des résultats . . . . .	55
3.2 Etude de l'équation de Jacobi . . . . .	58
3.3 Points conjugués des tores lorentziens avec un champ de Killing . . . . .	62
3.3.1 Les points conjugués résultant du champ de Killing . . . . .	62
3.3.2 Géodésiques invariantes et points conjugués . . . . .	63
3.3.3 Une classe de tores lorentziens sans points conjugués . . . . .	67
3.3.4 Des exemples de tores lorentziens sans points conjugués . . . . .	69
<b>4 Stabilité des tores lorentziens sans points conjugués en dimension 2</b>	<b>71</b>
4.1 Description des résultats . . . . .	71
4.2 Déformation d'un tore lorentzien sans points conjugués . . . . .	72
4.2.1 Sur le champ de Killing d'une métrique lorentzienne sur le tore . . . . .	72
4.2.2 Une fonction continue contrôlant les points conjugués . . . . .	77
4.2.3 Digression : Equations de Jacobi dont toutes les solutions sont périodiques . . . . .	79
4.2.4 Application : Géodésiques invariantes avec un champ de Jacobi non périodique . . . . .	84
4.2.5 Stabilité par déformation . . . . .	85





# Introduction

## POINTS CONJUGUÉS DES TORES LORENTZIENS

La question générale qui anime ce travail est de savoir s'il y a "beaucoup" d'exemples de métriques sans points conjugués en géométrie lorentzienne. Deux points  $p$  et  $q$  sont conjugués le long d'une géodésique  $\gamma$  si  $q$  est un point critique de l'application exponentielle  $exp_p : T_p M \rightarrow M$  le long de  $\gamma$ , i.e.  $d_v exp_p$ , où  $v = exp_p^{-1}(q)$  et  $\gamma = \gamma_v$ , n'est pas injective. Cette notion est symétrique, même si cela n'apparaît pas dans cette définition (voir plus loin la définition avec l'équation de Jacobi). Prenons par exemple deux points antipodaux de la sphère riemannienne : quelque soit la direction dans laquelle une géodésique quitte le premier point, elle arrive au deuxième ; ces points sont donc conjugués.

Dire que  $M$  ne contient pas de points conjugués équivaut alors à dire que l'application exponentielle est un difféomorphisme local. Dans le cas riemannien, cela entraîne des contraintes topologiques ; en effet, lorsque  $M$  est une variété complète (par exemple compacte), cela entraîne que l'application  $\widetilde{exp}_p : T_p \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  est un revêtement, et donc un difféomorphisme, puisque  $\widetilde{M}$  est simplement connexe. Ainsi, étant donné un point  $q \in \widetilde{M}$  distinct de  $p$ , l'unique géodésique qui lie  $p$  et  $q$  est minimale (pour la longueur) parmi les courbes passant par  $p$  et  $q$ . Il y a donc un lien, en riemannien, entre le fait que les géodésiques ne soient pas globalement minimisantes, et les singularités de la fonction  $exp$ . Comme il n'existe pas de théorème de Hopf-Rinow lorentzien, le fait que l'application exponentielle soit un difféomorphisme local ne signifie pas qu'il s'agit d'un revêtement.

Dans l'exemple de la sphère, on a une infinité de géodésiques passant par ces deux points, mais en général, ce n'est pas le cas. Donnons un autre exemple (cf. [25]) : on note  $\mathcal{P}$  le parabolöide de révolution  $z = x^2 + y^2$ , muni de la métrique euclidienne de  $\mathbf{R}^3$ , et  $O$  l'origine de  $\mathbf{R}^3$ . Les méridiens sont des géodésiques de  $\mathcal{P}$  qui passent par  $O$  ; fixons une géodésique  $\gamma$  portée par un méridien, partant d'un point  $p$  distinct de  $O$  avec un vecteur directeur pointant dans la direction  $z < 0$ . Les deux points  $O$  et  $p$  sont conjugués le long de  $\gamma$ , et les géodésiques issues de  $p$  et proches de  $\gamma$  coupent celle-ci en des points  $O_n$  qui tendent vers  $O$ .

Ce comportement dans le cas du parabolöide est caractéristique de deux points conjugués de n'importe quelle variété riemannienne : si deux points  $p$  et  $q$  sont conjugués le long d'une géodésique  $\gamma$ , alors il existe une suite de géodésiques issues de  $p$  et convergent vers  $\gamma$ , et qui coupent celle-ci en des points  $q_n$  qui tendent vers  $q$ . Piccione et Al. montrent dans [25] que ce comportement est vrai aussi en lorentzien, dans le cas des surfaces (en dimension plus grande, cela reste vrai si  $\gamma$  n'est pas de type espace). En particulier, cela signifie que l'application exponentielle  $exp_p$  n'est injective sur aucun voisinage de  $v = exp_p^{-1}(q)$ , tel que  $\gamma = \gamma_v$ .

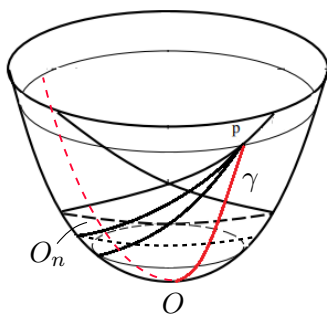


FIGURE 1 – Les géodésiques issues de  $p$  qui tendent vers le méridien (en rouge), coupent celui-ci en des points qui tendent vers  $O$

**Points conjugués : riemannien vs lorentzien.** L'étude des variétés compactes sans points conjugués est déjà bien aboutie en riemannien (cf. l'article de synthèse de Ruggiero [29]). Dans ce contexte, l'absence de points conjugués impose des contraintes assez fortes sur la topologie de la variété, et même sur la géométrie. Ainsi, un théorème de E. Hopf (1948) affirme que toute métrique riemannienne sur le tore  $T^2$  sans points conjugués est nécessairement plate (pour une généralisation en toute dimension, voir [8]). La preuve de ce théorème utilise les intégrales des solutions de Riccati pour relier la géométrie à des invariants topologiques, en l'occurrence le théorème de Gauss-Bonnet qui dit qu'en moyenne la courbure est nulle. C'est donc important dans ce théorème d'avoir un tore ; la preuve ne marcherait pas sur le plan, et de fait, il suffit de considérer une métrique à courbure négative pour avoir une métrique sans points conjugués sur le plan.

Green et Gulliver [16] ont utilisé le résultat de Hopf pour montrer que toute perturbation sans points conjugués et à support compact de la métrique plate standard du plan  $\mathbf{R}^2$  reste plate (une sorte de théorème de Hopf local sur le plan). Un théorème d'Anderson, Dahl et Howard dans [1] étend ensuite ce résultat au cas des métriques lorentziennes. Bien que ce travail se rapproche de la situation riemannienne, un résultat récent montre qu'en lorentzien, la situation s'avère moins rigide. Un résultat dû à Bavard et Mounoud (voir [2]) met en évidence l'existence d'un tore lorentzien non plat et sans points conjugués : le tore de Clifton-Pohl (pour une définition, cf. Équation (3.2), Section 3.1). Ce résultat récent soulève de nombreuses questions. Par exemple, autour de :

- La rigidité des exemples connus (métriques plates et Clifton-Pohl) : peut-on les déformer en métriques sans points conjugués ? Autrement dit, existe-t-il un théorème de Hopf local ou pas ?
- La taille de l'espace des tores lorentziens sans points conjugués : y a-t-il d'autres exemples ? Il existe déjà des constructions géométriques permettant d'obtenir d'autres tores sans points conjugués à partir du tore de Clifton-Pohl (voir une description détaillée dans la section 3.1), mais ces tores sont tous modélés, à équivalence projective près, sur le même objet universel ; on dira qu'ils ont (projectivement) la même "géométrie locale".
- La structure topologique de cet espace : on sait que l'ensemble des tores avec points

conjugués est un ouvert pour la topologie  $C^2$  (cf. [2, Proposition 2.1]), mais on ignore par exemple s'il est dense.

**Équation de Jacobi.** On a vu que les points conjugus sont liées aux singularités de la fonction exponentielle. Une autre manière de le dire est la suivante : deux points sont conjugus le long d'une géodésique  $\gamma$  si et seulement s'il existe un champ de Jacobi non trivial sur  $\gamma$  s'annulant en ces deux points. Il est bien connu qu'un champ de vecteurs le long d'une géodésique correspond à une variation géodésique si ce champ est solution d'une équation différentielle dite "équation de Jacobi" définie le long de  $\gamma$  et impliquant la courbure. C'est cette caractérisation que nous allons utiliser dans ce travail. Sur une surface, et lorsque  $\gamma$  n'est pas de type lumière, nous verrons que l'équation se réduit à

$$u'' + \epsilon \kappa u = 0,$$

où  $\kappa$  est la courbure sectionnelle le long de  $\gamma$  et  $\epsilon = \pm 1$  est le signe de  $\langle \gamma', \gamma' \rangle$ . En riemannien, l'équation ne fait intervenir que la courbure sectionnelle le long de  $\gamma$ . Les points conjugus correspondent aux solutions s'annulant deux fois.

Si nous disposons d'outils importants en géométrie riemannienne pour obtenir des métriques sans points conjugus, nous ne connaissons en revanche aucun moyen géométrique de construire de telles métriques en lorentzien, si ce n'est de prendre des métriques plates. En effet, certaines hypothèses sur la courbure en riemannien conduisent à une connaissance approfondie du comportement des champs de Jacobi, permettant ainsi d'obtenir des informations qualitatives sur l'occurrence de points conjugus. Une conséquence directe du théorème de Rauch riemannien (cf. [12], p.29-30) est qu'on peut comparer le placement des points conjugus le long des géodésiques sur une variété de courbure bornée, avec la distribution bien connue des points conjugus en courbure constante. Ainsi, si les courbures sectionnelles de  $M$  satisfont  $\kappa \leq K_0$ , alors pour n'importe quelle géodésique  $\gamma$ ,  $\gamma(0)$  n'a pas de point conjugus le long de  $\gamma$  sur  $[0, \pi/\sqrt{K_0}[$ . En particulier, les variétés riemanniennes de courbure négative ne contiennent pas de points conjugus ; intuitivement, cela revient à dire qu'un espace de courbure négative "a moins de points conjugus qu'un espace plat", et donc n'en a pas du tout. Cela résulte du fait que les géodésiques émanant d'un point donné de  $M$  s'écartent plus rapidement que les géodésiques correspondantes dans un espace plat. Par ailleurs, il découle d'un résultat de Myers ([23], lemme p.402) que si la courbure vérifie  $\kappa \geq K_0 > 0$ , alors toute géodésique de longueur supérieure à  $\pi/\sqrt{K_0}$  contient forcément des points conjugus. Il existe des analogues lorentziens de ces résultats (voir [4], p. 404-412) ; en particulier, on a le résultat suivant : si tous les plans de type temps (resp. espace) ont une courbure sectionnelle positive (resp. négative), alors les géodésiques de type temps (resp. espace) ou de lumière ne contiennent pas de points conjugus. On remarquera que contrairement au cas riemannien, l'argument sur le signe de la courbure ne permet pas d'obtenir un résultat qui s'applique à toute la variété. Il n'est donc pas naturel, et ne permet pas de construire des métriques lorentziennes sans points conjugus, ce qui rend la question en lorentzien plus délicate.

**Boite à outils pour l'étude des points conjugus des surfaces lorentziennes.** Sans hypothèse sur la géométrie locale (restrictions sur la courbure), il est très difficile de

dire quelque chose sur le comportement des champs de Jacobi, et l'étude des géodésiques devient difficile. C'est pourquoi dans cette thèse, on s'est intéressé aux surfaces lorentziennes compactes admettant un champ de Killing, dont la structure géométrique est déjà bien étudiée dans [3]. Bavard et Mounoud montrent en effet l'existence de surfaces simplement connexes et maximales, c'est-à-dire inextensibles, dites "extensions universelles", qui classifient ces surfaces du point de vue des structures géométriques, et qui généralisent les modèles classiques connus en courbure constante. En particulier, le revêtement universel d'une surface lorentzienne compacte  $(X, K)$  avec un champ de Killing apparaît comme un ouvert propre de son extension universelle  $(E, K_E)$ . C'est un phénomène typiquement lorentzien, puisqu'une variété riemannienne compacte est nécessairement complète, et son revêtement universel ne peut donc pas être un ouvert strict divisible d'une surface plus grande. Il est à noter que ces extensions possèdent des points conjugués dès que la norme du champ s'annule deux fois sur une géodésique de lumière maximale, ou dès qu'elle a deux extremas locaux de même signe sur une telle géodésique (voir [3, Lemme 5.27]); en particulier, l'extension universelle d'un tore lorentzien non plat possède toujours des points conjugués ([3, Proposition 5.28]). Montrer qu'un tore avec un champ de Killing ne contient pas de points conjugués revient donc à montrer que ceux-ci sont à l'extérieur, i.e. ses géodésiques ne parcourent pas le tore suffisamment longtemps pour avoir des points conjugués. On voit ici que la non complétude joue un rôle essentiel.

L'existence des intégrales premières (constante de Clairaut d'une géodésique) et l'existence d'isométries supplémentaires de la surface (les réflexions par rapport aux géodésiques orthogonales au champ) dues à la présence d'un champ de Killing permettent d'étudier plus facilement le comportement des géodésiques; ces dernières seront toujours vues dans l'extension universelle. Nous distinguerons en particulier des géodésiques dites « périodiques » (ou invariantes par une translation de l'extension) qui joueront un rôle central dans notre étude. Ces géodésiques donnent en effet lieu à une équation de Jacobi avec un coefficient périodique, ce qui nous permettra dans ce cadre là d'adapter et d'exploiter des résultats de la théorie de Sturm-Liouville développés et recensés dans [26], [5], [7], [21] et [6] afin d'étudier la position relative des zéros des solutions de l'équation de Jacobi. Notre démarche est la suivante : d'abord, nous développons pour ces tores un point de vue qui nous permettra de caractériser plus facilement l'absence de points conjugués (voir la Section 3.1 pour une description claire et succincte), ensuite nous nous servirons des outils de la théorie de Sturm-Liouville pour une étude détaillée.

## AUTOUR DE LA COMPLÉTUDE DES SURFACES LORENTZIENNES ADMETTANT UN CHAMP DE KILLING

**Cas compact : Hopf-Rinow vs Clifton-Pohl.** Le théorème de Hopf-Rinow affirme qu'une métrique riemannienne est géodésiquement complète si et seulement si la distance qu'elle induit est complète, ce qui entraîne en particulier que toute variété riemannienne compacte est complète, de même pour toute variété riemannienne globalement homogène. Le théorème de Hopf-Rinow n'ayant pas d'équivalent en lorentzien, ses conséquences sont toutes mises en défaut. C'est le cas pour le tore de Clifton-Pohl. Plus généralement (voir Lemme p. 22, [10]), si une métrique lorentzienne sur le tore a toutes ses géodésiques de

lumière complètes, alors ses feuilletages de lumière n'ont pas de composante de Reeb. En particulier, le tore de Clifton-Pohl n'est pas complet (voir figure ci-dessous), et toutes les métriques complètes appartiennent à une même composante connexe de l'espace des métriques, celle des métriques plates. Nous obtenons les résultats suivants :

**Complétude des extensions universelles.** De façon générale, la complétude géodésique est un enjeu délicat en géométrie lorentzienne. Dans [27] et [28], Romero et Sanchez donnent différents exemples et différentes manières de construire des métriques lorentziennes incomplètes sur le tore  $T^2$ . A la même période, Guediri et Lafontaine obtiennent dans [17] des exemples de variétés lorentziennes compactes, localement homogènes et incomplètes.

Le manque de complétude dans le cas compact a donné lieu à l'obtention de conditions supplémentaires qui, jointes à la compacité, impliqueraient la complétude de la variété lorentzienne. Ainsi, dans la littérature, la question de la complétude géodésique en pseudo-riemannien est souvent posée du point de vue des  $(G, X)$ -structures : sous quelles hypothèses les  $(G, X)$ -variétés (où  $G$  préserve une métrique pseudo-riemannienne) compactes sont-elles géodésiquement complètes ? Lorsque  $G$  préserve une métrique riemannienne, toutes les  $(G, X)$ -variétés compactes sont complètes, par le théorème de Hopf-Rinow cité précédemment. Carrière montre dans [9] que toute métrique lorentzienne plate de  $T^2$  est complète ; ces variétés sont localement modelées sur le plan de Minkowski. Lorsque le tore possède un champ de Killing, Sanchez montre dans [30] que ces tores ne sont jamais géodésiquement complets lorsque le champ admet une orbite de lumière. On comprend pourquoi si on se rappelle que le revêtement universel d'un tel tore est un ouvert propre de son extension universelle, résultat cité plus haut. On dira que ces modèles géométriques, contrairement au cas de la courbure nulle, admettent des ouverts stricts divisibles par l'action d'un groupe discret d'isométries. Il est intéressant d'étudier la complétude de ces modèles, c'est ce que nous faisons dans le chapitre 1. Nous étudions plus généralement la complétude des surfaces lorentziennes simplement connexes admettant un champ de Killing.

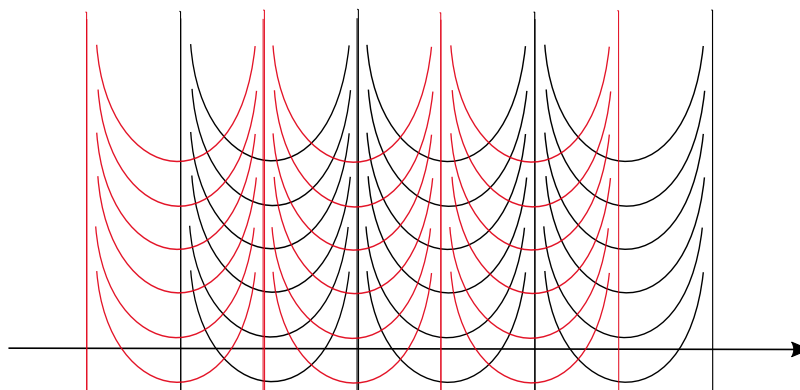


FIGURE 2 – Les feuilletages de lumière du tore de Clifton-Pohl

## CONTENU DE LA THÈSE

Ce manuscrit est divisé en quatre chapitres, dont nous décrivons brièvement le contenu.

Dans le **chapitre 1**, nous donnons les principaux outils et résultats de [3] traitant de la géométrie des surfaces lorentziennes admettant un groupe à un paramètre d'isométries. Nous mettons en place le vocabulaire nécessaire à la lecture de la suite de notre texte. Nous énonçons ces résultats sans démonstration.

Le **chapitre 2** se situe autour de la question de la classification des surfaces lorentziennes simplement connexes complètes dont le groupe d'isométries est de dimension 1 (c'est-à-dire avec un champ de Killing complet). Nous obtenons une description des surfaces lorentziennes simplement connexes admettant un champ de Killing complet, dont la géométrie est étudiée dans [3] et introduite dans le chapitre 1, à l'aide de deux données : la donnée d'une variété riemannienne de dimension 1 (généralement non séparée), qui fera office de la variété des feuilles du champ, munie d'une donnée combinatoire, et d'une fonction lisse définie dessus. Nous distinguons le cas analytique (ou à géométrie locale uniforme), i.e. le cas des extensions universelles, et le cas général qui comprend en particulier les surfaces maximales et les surfaces dont toutes les géodésiques de type lumière sont complètes (on dira  $L$ -complète comme dans [3]), pour voir que ces hypothèses géométriques ont une conséquence sur la topologie de l'espace des feuilles.

Nous exhibons enfin des classes de variétés dans lesquelles un critère simple de complétude sera donné, avant de donner des exemples de variétés  $L$ -complètes et incomplètes. Dans leur article [27], Romero et Sanchez conjecturent que la complétude des géodésiques de lumière d'une variété lorentzienne compacte entraîne sa complétude ; conjecture vraie pour les variétés localement homogènes [20]. Nous obtenons le résultat suivant :

**Theorem 0.0.1.** *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe admettant un champ de Killing  $K$ . On suppose que  $X$  est à courbure bornée. Alors  $X$  est complète si et seulement si elle est  $L$ -complète.*

Nous en déduisons en particulier que les extensions universelles des tores lorentziens sont complètes. Ceci va faciliter l'étude des points conjugués.

**Corollaire 0.0.2.** *Les surfaces lorentziennes à courbure bornée et dont le groupe d'isométrie est de dimension 1 sont complètes si et seulement si elles sont  $L$ -complètes.*

Cela pose la question plus générale de savoir si la complétude des géodésiques de lumière entraîne la complétude pour les surfaces à courbure bornée.

Dans les **chapitres 3 et 4**, qui constituent la partie principale de ce travail, nous construisons une infinité de nouveaux exemples de tores lorentziens (et de bouteilles de Klein) sans points conjugués, qui sont géométriquement non équivalents. De plus, nous prouvons que certains d'entre eux (le tore de Clifton-Pohl y compris) admettent un large espace de déformations parmi des métriques sans points conjugués.

Soit  $K$  un champ de Killing non trivial d'un tore lorentzien  $T$  non plat. Alors le flot de  $K$  est périodique (voir la preuve du Théorème 3.25 [3]). Il existe donc des coordonnées



$(u, \theta)$  sur  $\tilde{T}$  telles que  $\tilde{K}$ , le relevé de  $K$ , est égal à  $\partial_u$ . En relevant la courbure sectionnelle  $\kappa$  au revêtement universel, cela induit une fonction  $\tilde{\kappa}(\theta)$  définie sur l'espace des feuilles de  $\tilde{K}$  (qui est une droite). Dans le **chapitre 3**, nous montrons alors le résultat suivant :

**Theorem 0.0.3.** *Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien admettant un champ de Killing, et soit  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  son revêtement universel. Supposons que*

1. *les orbites de lumière de  $\tilde{K}$  sont géodésiquement incomplètes,*
2. *il n'y a qu'une seule orbite critique de  $\tilde{K}$  dans chaque bande de  $\tilde{T}$ ,*
3. *la courbure  $\tilde{\kappa}$  est une fonction monotone entre deux orbites critiques consécutives de  $\tilde{K}$ ,*
4. *les réflexions par rapport aux orbites critiques de  $\tilde{K}$  agissent sur  $\tilde{T}$  par isométrie,*
5. *le feuilletage orthogonal à  $\tilde{K}$  n'a que des composantes de Reeb.*

*Alors  $T$  n'a pas de points conjugués.*

Ici, une bande ouverte désigne une composante connexe de  $\{\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle \neq 0\}$  dans  $\tilde{T}$ , et une orbite critique de  $\tilde{K}$  est une orbite géodésique de celui-ci (correspondant aux points critiques de la fonction  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$ ).

Ce théorème permet d'obtenir de manière très simple une infinité d'exemples explicites de tels tores. Nous renvoyons le lecteur aux sections 3.3.4 et 4.2.5 de ce manuscrit pour quelques familles d'exemples. Remarquons cependant que les tores ainsi obtenus ne sont pas complets en raison de l'existence d'un champ de Killing qui change de type ; plus précisément, ceci résulte de deux faits : 1. les métriques complètes sont homotopes aux métriques plates (conséquence directe de Carrière et Rozoy [11]), 2. un tore sans points conjugués avec champ de Killing est soit plat soit non homotope à un tore plat (conséquence du Théorème 5.29, [3], cité ci-dessous). La question de savoir s'il existe un tore non plat, sans points conjugués et complet, ou encore un tore non plat, sans points conjugués et sans champ de Killing reste ouverte.

Même s'il apparaît alors que l'absence de points conjugués n'est pas un phénomène rare pour les tores lorentziens, on sait que dans la classe des tores lorentziens munis d'un champ de Killing, un tel tore qui n'a pas de points conjugués « ressemble » beaucoup à un tore de Clifton-Pohl. Plus précisément, on a

**Theorem 0.0.4.** *([3, Théorème 5.29]). Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien muni d'un champ de Killing. Si  $T$  est sans points conjugués, alors*

1. *l'ensemble des composantes de  $\{\langle K, K \rangle \neq 0\}$  est localement fini,*
2. *la norme de  $K$  change de signe sur deux composantes consécutives,*
3. *la fonction induite par  $\langle K, K \rangle$  sur l'espace des feuilles admet un seul extremum dans chaque bande,*
4. *le feuilletage orthogonal à  $\tilde{K}$  n'a que des composantes de Reeb.*

Il en découle en particulier qu'un tore lorentzien admettant un champ de Killing et qui ne contient pas de points conjugués, est soit plat soit non homotope à un tore plat. En supposant que les orbites de lumière de  $K$  sont incomplètes, on exhibe dans le **chapitre 3** un autre type d'obstruction. Ces orbites de lumière sont des géodésiques et un paramétrage géodésique est donné par  $e^{\lambda t}$ , où  $t$  est le temps du flot, et  $\lambda \neq 0$  dépend de l'orbite de lumière. On montre alors

**Theorem 0.0.5.** *Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien sans points conjugués, muni d'un champ de Killing  $K$ . Supposons que toutes les orbites de lumière de  $K$  sont incomplètes. Notons par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux paramètres associés à deux orbites de lumière consécutives de  $K$ , alors*

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

S'il est facile en riemannien d'obtenir des ouverts de métriques sans points conjugués (en prenant des variétés à courbure négatives), la question de savoir s'il existe des ouverts de métriques lorentziennes sans points conjugués subsiste encore. Notre dernier résultat, énoncé dans le **chapitre 4**, est un résultat de stabilité, dans la sous-classe des surfaces lorentziennes avec un champ de Killing. Notons  $\mathcal{L}_K(T)$  l'espace des métriques lorentziennes lisses sur le tore de dimension 2, admettant un champ de Killing. On montre le

**Theorem 0.0.6.** *Une métrique dans  $\mathcal{L}_K(T)$  suffisamment proche de la métrique de Clifton-Pohl, pour la topologie  $C^\infty$ , et vérifiant la condition du Théorème 0.0.5 ci-dessus, n'a pas de points conjugués.*

Ce résultat qui vaut en fait pour des métriques un peu plus générales, montre que non seulement il existe une infinité de familles de tores lorentziens sans points conjugués, mais en plus, il existe pour ces métriques un large espace de déformations parmi les métriques sans points conjugués. Cela permet en particulier d'obtenir des exemples de tores lorentziens sans points conjugués sans la condition (4) du Théorème 0.0.3 sur l'existence d'isométries supplémentaires.



# Chapitre 1

## Géométrie des surfaces lorentziennes admettant un champ de Killing

### 1.1 Classification des tores lorentziens munis d'un champ de Killing

Tous les faits que nous allons exposer dans cette section, concernant la géométrie des tores lorentziens admettant un champ Killing, sont issus de [3], dans le cadre plus général des surfaces lorentziennes avec un champ de Killing. Par commodité, en premier lieu, nous mettons en place le vocabulaire et les notations nécessaires à la lecture de la suite de notre texte, puis donnons les résultats principaux de [3] que nous utiliserons dans cette thèse, sans preuves. Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne avec un champ Killing  $K$ , que nous supposons complet.

**Definition 1.1.1** (rubans, bandes et dominos). *Soit  $U$  un sous-ensemble de  $X$  saturé par  $K$ . Supposons que  $K$  ne s'annule pas sur  $U$ ; on dit que  $(U, K)$  est*

- (1) *un ruban si  $U$  est un ouvert simplement connexe et si l'un des feuilletages de lumière de  $U$  est partout transverse à  $K$ .*
- (2) *une bande si  $U$  est homéomorphe à  $[0, 1] \times \mathbf{R}$ , avec  $\langle K, K \rangle$  nul au bord et non nul à l'intérieur de  $U$ .*
- (3) *un domino si  $U$  est un ouvert simplement connexe, et si  $K$  admet une unique orbite de lumière dans  $U$ .*

Les composantes connexes de  $X - \{\langle K, K \rangle = 0\}$  sont des bandes (en fait, intérieur de bandes). Une bande est dite de type espace (resp. temps) si  $K$  est de type espace (resp. temps) dans cette bande. On a la définition suivante, résultant du Lemme 2.8 de [3] :

**Definition 1.1.2.** *Une bande lorentzienne  $(B, K)$  est dite :*

- (1) *de type I : si les feuilletages définis par  $K$  et  $K^\perp$  sont des suspensions.  $(B, K)$  est un ruban.*
- (2) *de type II : si le feuilletage de  $K$  est une suspension et celui de  $K^\perp$  est une composante de Reeb.  $(B, K)$  n'est pas un ruban.*
- (3) *de type III : si le feuilletage de  $K$  est une composante de Reeb et celui de  $K^\perp$  une suspension.  $(B, K)$  n'est pas un ruban.*

Sur les figures ci-dessous, le feuilletage de  $K$  est représenté en noir, et le feuilletage orthogonal en rouge.

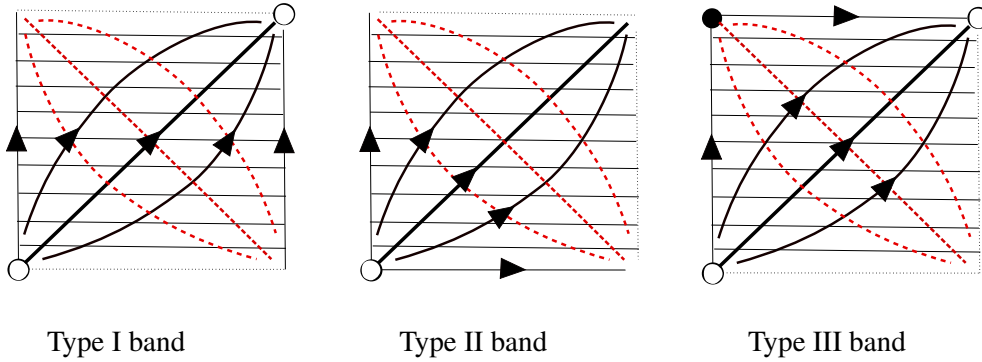


FIGURE 1.1 – Une bande de type I, type II et type III

Par exemple, le tore de Clifton-Pohl contient 4 bandes maximales de type II.

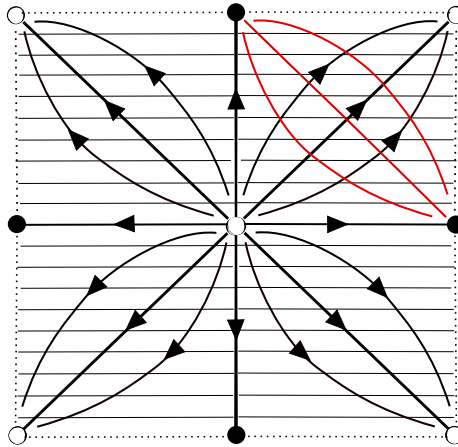


FIGURE 1.2 – Le tore de Clifton-Pohl torus a des bandes de type II

Une selle contient 4 bandes de type III.

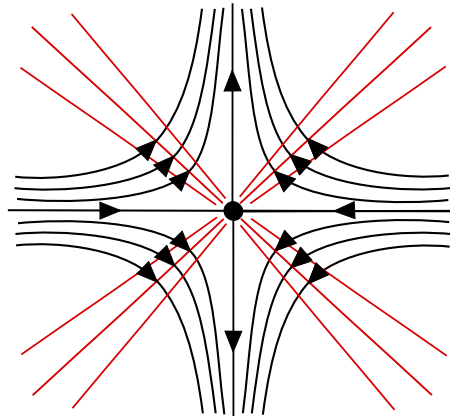


FIGURE 1.3 – Bandes de type III d'une selle

**L'existence de réflexions locales :**

La présence d'un champ de Killing entraîne l'existence de réflexions locales. La réflexion fixant une géodésique non dégénérée perpendiculaire au champ est une isométrie, mais contrairement au cas riemannien, elle n'est définie que localement dès que la norme de  $K$  s'annule (voir la figure ci-dessus). Nous mettons cela dans l'observation suivante :

**- Observation :** Soit  $U$  une composant connexe de  $X - \{\langle K, K \rangle = 0\}$ . Dans  $U$ , le flot géodésique orthogonal à  $K$  peut être paramétré par  $\langle K^\perp, K \rangle = 0$ ,  $\langle K^\perp, K^\perp \rangle = \pm 1$ . Le champ de vecteur ainsi obtenu est invariant par  $K$ , c'est-à-dire que  $[K^\perp, K] = 0$ ; cela donne les coordonnées  $(u, v) \in I \times \mathbf{R}$  on  $U$ , dans lesquelles la métrique s'écrit  $\pm du^2 + h(u)dv^2$ , où  $K^\perp = \partial_u$ ,  $K = \partial_v$ . Nous observons que  $(u, v) \mapsto (u, -v)$  est une isométrie de  $U$ . Cette réflexion envoie  $K$  sur  $-K$  et permute les deux feuilletages de lumière. Elle est appelée "réflexion générique".

**Un atlas adapté à  $K$** 

Si  $U$  est un ruban dans  $X$  et  $p \in U$ , on peut choisir un géodésique de lumière  $\gamma$  passant par  $p$ , maximale dans  $U$  et transverse à  $K$ . Sur le saturé de la géodésique par le flot de  $K$ , qui est égal à  $U$  par connexité, la métrique s'écrit

$$2dx dy + f(x)dy^2,$$

où  $L = \partial_x$  est un champ de lumière paramétré par  $\langle L, K \rangle = 1$  (le lemme de Clairaut indique que cette quantité est bien constante) et  $K = \partial_y$ . On appelle cela une "carte adaptée". La coordonnée notée  $x$ , qui est bien définie à translation et changement de signe près, est appelée "coordonnée transverse". Ainsi, la norme de  $K$  est donnée par  $f$  dans le coordonne transverse; elle s'annule sur les orbites de lumière de  $K$  contenues dans  $U$  et transverses à  $L$ .

Lorsque  $\langle K, K \rangle(p) \neq 0$ , il existe une autre géodésique de lumière transverse à  $K$  et passant par  $p$ , donnant lieu à une autre écriture  $2dx'dy' + f(-x')dy'^2$  pour la métrique sur un ouvert  $U'$  de  $X$ . Sur l'intersection  $U \cap U'$ , la norme de  $K$  ne s'annule pas : on a donc l'existence d'une réflexion générique, c'est-à-dire une isométrie locale fixant une géodésique perpendiculaire à  $K$  et permutant les deux feuilletages de lumière. Dans les coordonnées  $(x, y)$  les réflexions génériques s'écrivent (cf. [3, Proposition 2.5])

$$\phi_\beta(x, y) = (x, 2(G(x) + \beta) - y),$$

où  $G$  est une primitive de  $-1/f$ , et  $y = G(x) + \beta$  est le graphe de la feuille du feuilletage orthogonal à  $K$  fixée par la réflexion. On peut voir que le changement de coordonnée sur  $U \cap U'$  s'obtient en composant  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  avec une réflexion générique.

Il existe donc un atlas de  $X$  privé des zéros de  $K$  tel que sur chaque ouvert la métrique s'écrit  $2dx dy + f(x)dy^2$ , avec  $K = \pm \partial_y$ , et que les changements de cartes sont donnés par les réflexions génériques. On appelle cela "un atlas adapté à  $K$ ". Bien sûr, il existe aussi des coordonnées locales au voisinage des zéros du champ, où la métrique a une expression de la forme  $2dudv + \alpha(udv - vdu)^2$ , et  $K$  s'écrit  $u\partial_u - v\partial_v$ , avec  $\alpha$  une fonction invariante par  $K$ . On appelle cela une "carte exponentielle" (cf. [3, Proposition 2.35]).

**Exemple 1.1.3. Un atlas pour le tore de Clifton-Pohl,  $T_{CP}$** 

En choisissant la bonne paramétrisation des feuilletages de lumière, i.e. tel que  $\langle L, K \rangle = \langle L', K \rangle = 1$ , nous montrons qu'un atlas adapté pour le tore de Clifton-Pohl est donné par des ouverts  $U_i = I_i \times \mathbf{R}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), avec  $I_i = ]\frac{i\pi}{2}, \frac{i\pi}{2} + \pi[$ , chaque ouvert étant muni de la métrique  $2dudv + \sin(2u)dv^2$ . Une réflexion générique sur  $U_i \cap U_{i+1}$  est donnée par  $\phi(u, v) = (u, \log|\frac{\sin(2u)}{1-\cos(2u)}| - v)$ ; elle envoie  $K$  sur  $-K$  et  $L$  sur  $-L'$ . Sur deux cartes locales  $U_i$  et  $U_{i+1}$  où la métrique est donnée par  $2dudv + \sin(2u)dv^2$  et  $2du'dv' + \sin(-2u')dv'^2$  respectivement, on obtient un changement de coordonnées en composant  $(u, v) \mapsto (-u, -v)$  avec une réflexion générique.

**Classification des tores non élémentaires**

Lorsqu'il n'y a pas d'orbite de lumière du champ (on appelle cela un tore élémentaire), le revêtement universel du tore est complètement déterminé par la norme de  $K$ , comme en riemannien. Dans la suite, on supposera qu'on a un tore non élémentaire. Dans ce cas, la géométrie dépend d'une donnée combinatoire supplémentaire (qui détermine le type de bandes). Ainsi, on a la proposition suivante

**Proposition 1.1.4.** ([3, Proposition 5.2]). *Se donner une classe d'isométrie de revêtement universel de tore non élémentaire et non plat revient à se donner une fonction  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  périodique non constante, qui s'annule, et munie d'un marquage pair, modulo la relation d'équivalence  $f(x) \simeq \frac{1}{a^2}f(ax + b)$ .*

On appelle *marquage pair* de  $f$  la donnée d'un sous-ensemble fini (éventuellement vide) de cardinal pair de l'ensemble des milieux des intervalles de  $\mathbf{R} - f^{-1}(0)$  sur la plus petite période de  $f$ .

Pour s'en convaincre, soit  $(T, K)$  un tore non plat avec un champ de Killing  $K$ . Les courbes intégrales de  $K$  étant fermées (voir la preuve du Théorème 3.25, [3]), le champ possède une transversale fermée. Il s'ensuit que  $T$  ne contient pas de bandes de type III. De plus,  $T$  contient un nombre fini de bandes de type II. Maintenant, on considère une géodésique de lumière brisée  $\gamma$  dans  $\tilde{T}$  transverse à  $\tilde{K}$ , dont les points de bifurcation sont contenus dans les bandes de type II du tore. Cette géodésique est paramétrée par  $|\langle \dot{\gamma}, \tilde{K} \rangle| = 1$ . Soit  $p$  un point de  $\gamma$ ; posons  $\langle \dot{\gamma}(p), \tilde{K}(p) \rangle = 1$ ; cela définit une orientation sur  $\gamma$ . On remarque que  $\langle \dot{\gamma}, \tilde{K} \rangle$  change de signe à chaque point de bifurcation. Notons  $\gamma_i$  les géodésiques maximales contenues dans  $\gamma$  munie de l'orientation induite; chaque  $\gamma_i$  est contenue dans un ruban maximal dans lequel on a des coordonnées  $(x, y)$  telles que  $K = \partial_y$ ,  $\langle \partial_x, \partial_x \rangle = 0$  et  $\langle \partial_x, \partial_y \rangle = (-1)^i$ . Ces rubans recouvrent le tore. Définissons localement dans chaque ruban  $\nu = dy \wedge dx$ ; on voit facilement que  $\nu$  est une forme volume bien définie sur  $\tilde{T}$ . Il existe donc une submersion  $\mathbf{x} : \tilde{T} \rightarrow \mathbf{R}$  définie (à translation près) par  $i_K \nu = d\mathbf{x}$ , induisant un difféomorphisme global entre l'espace des feuilles de  $\tilde{K}$ , noté  $\mathcal{E}_{(\mathbf{R}^2, \tilde{K})}$  dans [3], et  $\mathbf{R}$ , faisant de cet espace une variété séparée de dimension 1 (voir [3, Proposition 2.21]). La norme de  $\tilde{K}$  se factorise alors en  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle = f \circ \mathbf{x}$ , où  $f$  est définie sur  $\mathcal{E}_{(\mathbf{R}^2, \tilde{K})}$ , identifié à  $\mathbf{R}$ . La submersion  $\mathbf{x}$  coïncide, à translation et changement de signe près, avec le coordonnée  $x$  de toute carte locale. La fonction  $f(x)$  ainsi obtenue est périodique. Sur une période, le cardinal des points de bifurcation (qui correspond au nombre

de bande de type II du tore) est nécessairement pair ; cette donnée induit un marquage de  $f$ .

Soit maintenant  $(p_k)$  la suite croissante des zéros de  $f$  dans la coordonnée  $\mathbf{x}$ , tel que les rubans définis par  $U_k = (I_k, (-1)^k 2dx dy + f(x)dy^2)$ , où  $I_k = ]p_k, p_{k+1}[$ , sont maximaux dans le tore (l'ensemble des zéros est en fait discret, car les bandes de type II ne s'accumulent pas). On recolle les ouverts  $U_k$  et  $U_{k+1}$  au moyen des réflexions locales  $\psi_k(x, y) = (x, 2G(x) + y)$ , où  $G$  est une primitive de  $-1/f$  sur  $I_k \cap I_{k+1}$ . La surface obtenue est le revêtement universel du tore muni de son champ de Killing  $\tilde{K}$ . Cette construction donne un atlas adapté du revêtement universel ; on dira qu'on a une structure modelée sur  $E_f^u$ , ou  $E_f^u$ -structure, sur  $(\tilde{T}, \tilde{K})$ , qui, localement, est déterminée par la fonction  $f$ . Une telle structure existe sur une surface lorentzienne connexe et saturée chaque fois que la fonction norme du champ se factorise telle façon (voir [3, Proposition 3.19]).

Inversement, si on se donne une fonction périodique  $f$ , on peut définir de la même manière une surface lorentzienne qui est le revêtement universel d'un tore. Si on se donne de plus un marquage de  $f$ , cette surface est unique à isométrie près. Notons que si les  $I_i$  sont choisis de façon que chacun d'eux ne contienne qu'un seul zéro de  $f$ , on obtient une surface dont toutes les bandes sont de type II, car alors deux zéros consécutifs de  $\langle K, K \rangle$  appartiennent à deux feuilletages de lumière différents. Si on choisit un  $I_i$  avec un nombre arbitraire de zéros de  $f$  dans celui-ci, le tore va également contenir des bandes de type I. Si le marquage est vide, la surface obtenue ne contient que des bandes de type I.

**Definition 1.1.5** (Nombre minimal de bandes). *On suppose que les composantes connexes de  $\{f \neq 0\}$  ne s'accumulent pas. On définit  $n$  comme le nombre de zéros de  $f$  sur une période. Ce nombre correspond au nombre de bandes du "plus petit" quotient du revêtement universel donnant un tore avec la même  $E_f^u$  structure.*

Ainsi, pour le tore de Clifton-Pohl, on a  $n = 2$ , car il est lui-même un revêtement à 2-feuillets d'un tore contenant 2 bandes, et ayant la même structure que  $T_{CP}$ . On ne considérera pas le cas où ces composantes connexes s'accumulent puisque l'hypothèse de finitude locale est une condition nécessaire pour qu'un tore avec un champ de Killing soit sans points conjugués (voir [3, Théorème 5.29]).

## 1.2 Extensions universelles des tores avec un champ de Killing

Étant donné un tore non élémentaire, l'existence de réflexions locales qui sont des isométries, et le fait qu'elles ne soient pas globalement définies va permettre d'étendre notre surface.

Supposons que le revêtement universel de  $T$  est isométrique à un ruban  $R$ , on peut recoller une autre copie de  $R$  le long d'une des bandes du ruban, à l'aide d'une réflexion générique de la bande. Appelons  $B$  cette bande. Étant donné que les réflexions permutent les deux feuilletages de lumière, cela donne une extension propre de  $R$  qui est séparée.

Les géodésiques de lumière horizontales de  $R$ , i.e. les courbes intégrales de  $\partial_x$ , sont complètes. Les géodésiques de lumière verticales intérieures aux bandes sont incomplètes, à l'exception de celles se trouvant à l'intérieur de  $B$ , car celles-ci sont les courbes intégrales de  $\partial_x$  de l'autre copie du ruban.

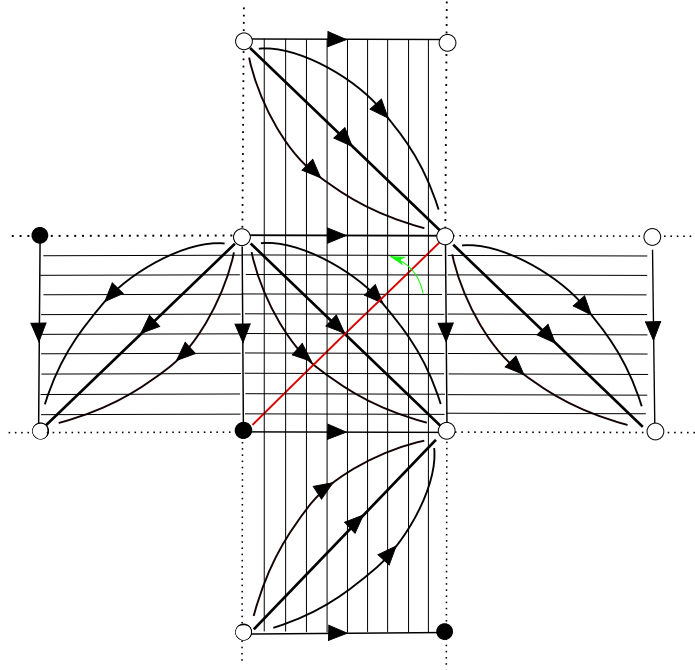


FIGURE 1.4 – Recollement de deux rubans le long d'une bande

Soit  $(E, K)$  une surface lorentzienne saturée et simplement connexe ; toute bande de  $E$  est contenue dans deux rubans maximaux. La surface  $(E, K)$  est dite « réflexive » si toute réflexion locale générique de  $(E, K)$  (définie à l'intérieur d'une bande) s'étend isométriquement à la réunion des deux rubans maximaux recouvrant cette bande (cf. [3, Définition 3.7] ; voir Figure 1.2 ci-dessus).

Le théorème suivant de [3] montre que le revêtement universel d'un tore peut être étendu en une surface maximale, unique sous certaines hypothèses, et dont toutes les géodésiques de lumière sont complètes (on dira  $L$ -complète). L'existence de cette extension sera utilisée de manière essentielle dans ce travail ; on appelle la surface lorentzienne ainsi obtenue "l'extension universelle" du tore. Énonçons quelques propriétés essentielles de cette surface. Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbf{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction lisse. Notons  $R_f = (R, K)$  la surface  $(R = I \times \mathbf{R}, 2dx dy + f(x)dy^2)$ ,  $(x, y) \in R$ , avec un champ de Killing  $K = \partial_y$  ; on l'appelle le "ruban associé à  $f$ ".  $R_{f^-}$  désigne le ruban associé à  $f^-$ , défini pour  $-x \in I$  par  $f^-(x) = f(-x)$ .

**Theorem 1.2.1.** ([3, Proposition 3.3, Théorème 3.25]). Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien avec un champ de Killing non trivial  $K$ ,  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  son revêtement universel. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction induite par  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$  dans la coordonnée  $x$ . Il existe une surface lorentzienne maximale  $(E_f^u, K^u)$  homéomorphe à  $\mathbf{R}^2$  telle que  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  se plonge isométriquement dans  $E_f^u$ , et  $E_f^u$  est  $L$ -complète et réflexive. Cette extension est unique et chaque ruban maximal contenu dans  $(E_f^u, K^u)$  est isométrique soit à  $R_f$  soit à  $R_{f^-}$ .

La surface  $E_f^u$  satisfait la propriété remarquable de réflexivité suivante :

**Proposition 1.2.2.** ([3, Lemma 3.10]). *Les réflexions génériques de tout ruban contenu dans  $E_f^u$  s'étendent en des isométries globales de  $E_f^u$ .*

Si le tore ne contient pas d'orbite de lumière du champ, l'extension recherchée du revêtement universel est égale à celui-ci.

Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien non élémentaire avec un champ de Killing  $K$ , et  $E_f^u$  l'extension du revêtement universel donnée dans le Théorème 1.2.1 ci-dessus. Cette surface lorentzienne est obtenue en deux opérations. En gros, elles consistent à :

1. Recoller des copies de  $R_f$ , le ruban maximal défini ci-haut, le long des bandes, en utilisant des réflexions génériques. Cette opération étend les géodésiques de lumière intérieures aux bandes en des géodésiques complètes ;

2. Ajout de points selles : une "selle symétrique" est obtenue dans [3], Proposition 2.29, comme l'extension d'un domino dont l'unique orbite de lumière de  $K$  est incomplète, par une surface simplement connexe contenant un zéro unique de  $K$ , et dont la métrique est symétrique par rapport à  $p$ . Cette extension est unique à isométrie près ([3, Proposition 2.37]). Cela étend les orbites de lumière de  $K$  qui sont géodésiquement incomplètes en des géodésiques complètes. Avec un choix approprié des réflexions génériques dans la première opération, on peut rendre cette extension compatible avec la surface obtenue dans l'étape 1 (cf. [3, Proposition 3.3]).

### Adjonction de selles :

Une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing complet est une selle si elle est simplement connexe et si le champ admet un unique zéro, appelé point selle. Si une surface vérifie la propriété de réflexivité de la Proposition 1.2.2 ci-dessus (en particulier dans le cas des surfaces analytiques maximales, [3, Proposition 3.8]), les selles contenues dans la surface sont symétriques par rapport au point selle. Cependant, en général (dans le cas lisse), il existe des selles non symétriques ; en particulier, un domino dont l'orbite de lumière de  $K$  est incomplète admet une infinité d'extensions par des selles non symétriques.

Une quasi-selle est définie dans [3] comme une surface lorentzienne homéomorphe au cylindre, munie d'un champ de Killing ne s'annulant pas, et admettant 4 feuilles de lumière incomplètes et découpant la surface en 4 bandes de type Reeb.

La Proposition 2.32 [3] caractérise les quasi-selles qui peuvent être complétées en selles, en ajoutant un zéro du champ. Nous aurons besoin de cette caractérisation dans le chapitre 2 ; afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, nous terminons ce paragraphe en revenant plus en détail sur le processus d'adjonction de selles.

**Proposition 1.2.3.** ([3, Proposition 2.32], *complétion d'une quasi-selle*). *Une quasi-selle se complète en une selle (par l'adjonction d'un zéro du champ) si et seulement si l'holonomie de la structure projective transverse du feuilletage orthogonal au champ vaut l'identité.*



Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing complet et sans zéros. Si les feuilles de lumière de  $K$  sont incomplètes et découpent  $X$  en bandes de type Reeb, alors le feuilletage orthogonal au champ  $K$  admet une (unique) structure projective transverse invariante par l'action du flot de  $K$  ([3, Proposition 2.27]). Le feuilletage orthogonal au champ d'une quasi-selle admet donc une structure projective transverse invariante.

Supposons que  $(X, K)$  est une quasi-selle.  $X$  peut être recouvert par 4 dominos  $U_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  tels que  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ; chaque domino étant muni de sa carte adaptée. Le changement de cartes sur  $U_i \cap U_{i+1}$  est donné par  $(x_{i+1}, y_{i+1}) = \theta_i(x_i, y_i)$ , avec  $\theta_i(x_i, y_i) = (-x_i, y_i - 2G_i(x_i))$ , où  $G_i$  est une primitive de  $-1/f_i$ .

L'espace des feuilles du feuilletage orthogonal est un cercle recouvert par 4 cartes affines. Sur chaque ouvert  $U_i$ , on a un paramètre affine pour  $\mathcal{K}^\perp$  (unique à homothétie près) donné par une submersion  $\zeta_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}$  valant 0 sur l'unique orbite de lumière de  $K$ ;  $\zeta_i$  s'écrit dans les coordonnées adaptées :

$$\zeta_i = \frac{\phi_i(x_i)e^{\lambda_i y_i}}{\lambda_i} f_i(x_i), \quad (1.1)$$

où  $\lambda_i = f'_i(0)$  (les orbites de lumière de  $K$  étant incomplètes, on a  $\lambda_i \neq 0$ ; de plus, pour tout  $i, \lambda_i + \lambda_{i+1} = 0$ ) et  $\phi_i$  est une solution non nulle de l'équation différentielle

$$\phi'_i(x_i)f_i(x_i) + \phi_i(x_i)f'_i(x_i) = \lambda_i\phi_i(x_i).$$

Remarquons que l'action d'une homothétie de rapport  $\alpha > 0$  sur le paramètre affine induit un décalage de la coordonnée verticale  $y' = y + \frac{1}{\lambda} \ln \alpha$ . Fixer le paramètre affine à homothétie près dans  $\mathbf{R}_+^*$ , sur un ouvert  $U_i$ , revient donc à choisir une origine pour la coordonnée  $y$  du flot de  $K$  sur  $U_i$ .

Dans  $U_i \cap U_{i+1}$ , en prenant une orbite de  $K$  comme transversale au feuilletage orthogonal, on voit que l'action de  $\theta_i$  sur  $\mathcal{K}^\perp$  est donnée par  $\zeta_i\zeta_{i+1} = (\zeta_1^*)^2$ , où  $\zeta_1^*$  est le paramètre dans  $U_i$  de la géodésique orthogonale fixe par la réflexion  $-\theta_i$ . Par suite l'holonomie de la structure projective transverse à  $\mathcal{K}^\perp$  est l'homothétie de rapport  $\nu = \left(\frac{\zeta_2^*\zeta_4^*}{\zeta_1^*\zeta_3^*}\right)^2$ . Sur  $U_5 = U_1$  on a donc  $\zeta_5 = \nu\zeta_1$ ; de plus, dans les coordonnées adaptées le paramètre  $\zeta_i^*$  s'écrit

$$\zeta_i^* = \frac{\phi_i(x_i)e^{\lambda_i G_i(x_i)}}{\lambda_i} f_i(x_i)$$

(cela découle de (1.1), en se rappelant que l'équation de l'axe de la réflexion  $-\theta_i$  dans les coordonnées  $(x_i, y_i)$  est donnée par  $y_i = G_i(x_i)$ ). D'après la Proposition 1.2.3,  $X$  se complète en une selle si et seulement si  $\left(\frac{\zeta_2^*\zeta_4^*}{\zeta_1^*\zeta_3^*}\right)^2 = 1$ .

Appelons  $l_i$  la géodésique de lumière dans  $U_i$  portée par la droite  $\{y_i = 0\}$ ; pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  on a  $l_{i+1} \cap U_i = \theta_i(l_i \cap U_{i+1})$ . La relation  $\zeta_5 = \nu\zeta_1$  étant équivalente à  $y_5 = y_1 + \frac{1}{\lambda_1} \ln \nu$ , la condition ci-dessus est alors équivalente à  $l_1 \cap U_4 = \theta_4(l_4 \cap U_1)$ . Si les réflexions  $-\theta_1, -\theta_2, -\theta_3$  sont fixées, la condition  $l_1 \cap U_4 = \theta_4(l_4 \cap U_1)$  détermine la réflexion  $-\theta_4$ , dont l'axe de réflexion est alors la géodésique orthogonale passant par  $l_1 \cap l_4$ . Il est donc toujours possible de modifier  $\theta_4$  de façon à avoir  $\nu = 1$ , et donc de sorte que la quasi-selle se complète en selle.



**Question : les constructions de rubans et de selles dépendent-elles continûment de la métrique ?**

Les lemmes que nous prouvons dans ce paragraphe seront utilisés dans la section 4.2.1 lorsque nous étudierons la convergence des champs de Killing pour les métriques convergentes.

Soit  $(T, K)$  un tore lorentzien avec un champ de Killing  $K$ , et soit  $E_f^u$  l'extension de son revêtement universel, donnée dans le théorème 1.2.1 ci-dessus. Rappelons que cette surface lorentzienne est obtenue en utilisant deux opérations :

1. recoller des copies de  $R_f$ , le ruban maximal défini dans le Théorème 1.2.1, le long des bandes, en utilisant des réflexions génériques ;
2. ajout de points selles.

Notons  $U$  un domino dont l'unique orbite de lumière de  $K$  est incomplète ; on a vu que  $U$  admet une unique extension  $\tilde{U}$  par une selle symétrique. Écrivons  $U = I \times \mathbf{R}$ ,  $2dx dy + f(x)dy^2$  dans les coordonnées locales, avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = \lambda$ ,  $\lambda \neq 0$  (Remarque 3.3.15). La métrique de  $\tilde{U}$  s'écrit ([3, Proposition 2.29])

$$\frac{1}{\lambda} [v^2 h(uv) du^2 - 2(j(uv) + \frac{1}{j(uv)}) dudv + u^2 h(uv) dv^2]; \quad uv \in I, v \in \mathbf{R}, \quad (1.2)$$

où  $x = uv$ ;  $j, h \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ , tel que  $j(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$  et  $h(x) = \int_0^1 l'(tx) dt$ , avec  $l(x) = j(x) - \frac{1}{j(x)}$ , et le champ de Killing correspond à  $K = \frac{2}{\lambda}(u\partial_u - v\partial_v)$ .

On veut savoir comment ces objets, à savoir  $R_f$  et les selles, dépendent de la métrique. Nous verrons que si le champ de Killing dépend continûment de la métrique, alors ces objets aussi.

Soit  $\tilde{T}$  un revêtement universel de  $T$ , et  $\tilde{K}$  son champ de Killing. Rappelons que la norme de  $\tilde{K}$  peut s'écrire  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle = f \circ \mathbf{x}$ , où  $\mathbf{x} \in C^\infty(\tilde{T}, \mathbf{R})$  est définie à translation et changement de signe près, et  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . On peut rendre la construction de  $\mathbf{x}$  plus géométrique en regardant la preuve de la Proposition 2.21, [3]. Fixons  $p \in \tilde{T}$ , et considérons une base hyperbolique orientée positivement  $(X, Y)$  dans  $\mathfrak{X}(\tilde{T})$ , i.e.  $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0$  et  $\langle X, Y \rangle = 1$ . Définissons une forme volume  $\nu$  en posant  $\nu(X, Y) = 1$ ;  $\nu$  ne dépend pas du choix de la base. Définissons une 1-forme  $\omega := i_{\tilde{K}} \nu$ ; cette forme est fermée, donc exacte puisque  $\tilde{T}$  est simplement connexe, donc il existe (une unique) fonction  $\mathbf{x} \in C^\infty(\tilde{T}, \mathbf{R})$  telle que  $\omega = d\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}(p) = 0$ . Il est facile de voir que cette fonction  $\mathbf{x}$  coïncide avec celle définie avant.

L'espace  $\mathfrak{X}(T)$  des champs de vecteurs lisses sur  $T$ , ainsi que  $\mathcal{L}_K(T)$ , sont munis de la topologie  $C^r$ .

**Lemme 1.2.4.** *Soit  $(g, K) \in \mathcal{L}_K(T) \times \mathfrak{X}(T)$  une métrique non plate sur  $T$ , telle que  $\mathcal{L}_K g = 0$ , et soit  $(g_n, K_n)$  une suite de métriques dans  $\mathcal{L}_K(T) \times \mathfrak{X}(T)$  telles que  $\forall n, \mathcal{L}_{K_n} g_n = 0$  et  $(g_n, K_n) \xrightarrow{C^r} (g, K)$ . Alors la suite de rubans  $R_{f_n}$ , où  $f_n$  est la fonction induite par la norme de  $K_n$ , converge vers  $R_f$ , où  $f$  est induite par la norme de  $K$ , pour la topologie  $C^r$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $n$ , on peut choisir une forme volume lorentzienne  $\nu_n$  qui définit la coordonnée transverse  $x_n$  en posant  $i_{\tilde{K}_n} \nu_n = d\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{x}_n(p) = 0$ , telle que la suite  $\nu_n$

converge vers  $\nu$ . Par définition  $\mathbf{x}_n$  converge  $C^r$  vers  $\mathbf{x}$  sur toute partie compacte de  $\tilde{T}$ . Maintenant, considérons une courbe  $c$  partout transverse à  $\tilde{K}$  et  $\tilde{K}_n$  pour  $n$  assez grand, et coupant chaque feuille de  $\tilde{K}$  une seule fois. Définissons  $I = \{c(t), t \in \mathbf{R}\}$  sur lequel  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_n$  sont des difféomorphismes. En écrivant  $f = g(\tilde{K}, \tilde{K}) \circ \mathbf{x}^{-1}$ , on obtient la  $C^r$  convergence de  $f_n$  vers  $f$  sur toute partie compacte de  $\mathbf{R}$ , donc partout, puisqu'elles sont périodiques. Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Lemme 1.2.5.** *Soit  $(U, K)$ ,  $U = I \times \mathbf{R}$ , un domino lorentzien où l'unique orbite de lumière de  $K$  (représentée par  $x = 0$ ) est incomplète. Notons  $g$  la métrique sur  $U$  et soit  $(g_n, K_n)$  une suite de métriques sur  $U$  telles que  $(g_n, K_n) \xrightarrow{C^r} (g, K)$ , avec  $r \geq 2$ . Alors il existe un voisinage  $J$  de 0 tel que l'extension  $V := J \times \mathbf{R}$  pour la métrique  $g_n$ , notée  $\tilde{V}_n$ , converge  $C^{r-2}$  vers  $\tilde{V}$ , l'extension pour la métrique  $g$ .*

*Démonstration.* Commençons par le fait suivant :

**Fait 1.2.6.** *Soit  $F_n$  une suite de fonctions définies sur une variété compacte  $M$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , qui converge uniformément vers  $F$ . Supposons que  $F$  admet un unique zéro dans  $M$  que l'on note  $p$ , et que  $F_n$  admet un unique zéro  $p_n$  dans  $M$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors la suite  $p_n$  converge vers  $p$  dans  $M$ .*

Maintenant, soit  $p$  un point sur l'orbite de lumière de  $K$  dans  $U$  ; la coordonnée transverse pour la métrique  $g$  satisfait  $x(p) = 0$ . Sur un voisinage de cette orbite, il existe une unique orbite de lumière de  $K_n$  pour  $n$  assez grand (le zéro de  $f$  dans  $U$  est simple compte tenu de la Remarque 3.3.15), donc soit  $p_n$  un point sur cette orbite tel que la suite  $(p_n)$  converge vers  $p$  (cela est possible par le Fait 1.2.6 ci-dessus). Notons  $x_n \in C^\infty(U, I_n)$  la coordonnée transverse de  $g_n$  telle que  $x_n(p_n) = 0$ . Puisque  $I_n$  converge vers  $I$  et  $f_n$  est proche  $C^r$  de  $f$ , on peut trouver un voisinage  $J$  de 0 sur lequel  $f$  et  $f_n$  sont toutes définies pour  $n$  assez grand, avec  $f_n$  admettant un unique zéro dans  $J$ . La conclusion du lemme est donc une conséquence de l'Equation (1.2) qui donne les expressions explicites des extensions.  $\square$

**Remarque 1.2.7.** *Nous signalons que ces lemmes affirment la convergence des rubans et des selles en tant qu'objets abstraits liés à la métrique, c'est-à-dire dépendant uniquement de  $f$ . Nous n'avons rien dit sur les coordonnées locales  $(x, y)$  et  $(u, v)$ . En fait, nous verrons dans le paragraphe 4.2.1 que ces cartes locales dépendent continûment de la métrique.*

# Chapitre 2

## Surfaces simplement connexes complètes avec champ de Killing

L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan  $\mathbf{R}^2$  est une variété de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe (en général non séparée) : Haefliger-Reeb [19]. Se donner une surface lorentzienne simplement connexe et maximale munie d'un champ de Killing donne lieu à une structure feuilletée du plan éventuellement singulière; les singularités sont des points selles adhérents à 4 orbites de lumière du champ de Killing (voir la preuve de la Proposition 2.20 [3]). L'espace des feuilles d'un tel feuilletage n'est pas simplement connexe, mais cela donne lieu à une jolie variété de dimension 1 étalée dans  $\mathbf{R}$ . Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous examinons la topologie de cette variété; nous verrons en particulier que certaines propriétés géométriques de la surface ont des conséquences directes sur la topologie de la variété des feuilles.

A partir de la géométrie des surfaces lorentziennes simplement connexes admettant un champ de Killing complet, décrite dans [3] et introduite dans le Chapitre 1, nous donnons dans le second paragraphe une description de ces surfaces à partir de deux données : la donnée d'une variété riemannienne orientable de dimension 1 (généralement non séparée), qui fera office de la variété des feuilles, munie d'une donnée combinatoire, et d'une fonction lisse définie dessus. Une fois obtenue cette correspondance, nous exhiberons des classes de variétés dans lesquelles un critère simple de complétude sera donné. En particulier, nous pouvons décrire, dans ce langage, toutes les surfaces lorentziennes complètes, simplement connexes et maximales, admettant un champ de Killing complet, et qui sont à courbure bornée. En effet, se donner une telle surface revient à se donner

1. une variété riemannienne orientable de dimension 1 dont la topologie est décrite dans le paragraphe 2.1 de ce chapitre, munie d'une donnée combinatoire, et vérifiant une certaine propriété de « faible » complétude géodésique qui sera précisée dans le paragraphe 2.3,
2. une fonction lisse définie sur la variété des feuilles à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , de dérivée seconde bornée.

Parmi les surfaces lorentziennes simplement connexe et maximales avec un champ de Killing complet, il y a ce que nous appelons les "petites surfaces" qui contiennent un

nombre fini de rubans (Définition 2.3.12). Nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour la complétude de ces surfaces.

## 2.1 Espace des feuilles

Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe admettant un champ de Killing  $K$  non trivial et complet. On note  $\mathcal{E}_X$  la variété des feuilles de  $K$ . La coordonnée transverse  $\mathbf{x} \in C^\infty(X, \mathbf{R})$  induit un difféomorphisme local de  $\mathcal{E}_X$  sur  $\mathbf{R}$ , faisant de  $\mathcal{E}_X$  une variété de dimension 1 non séparée, étalée dans  $\mathbf{R}$ , et que l'on peut munir d'une structure riemannienne en prenant la métrique  $\sigma = d\mathbf{x}^2$ . Dans ce paragraphe, nous allons examiner la topologie et la géométrie de cette variété :

- Quels sont les branchements possibles dans  $\mathcal{E}_X$  ? Quelle est leur combinatoire (contraintes globales sur les points de branchement) ?
- La complétude de  $\mathcal{E}_X$  (vue comme une variété riemannienne) ?

Dans le cas élémentaire, i.e. lorsque la norme de  $K$  ne s'annule pas, l'espace des feuilles est homéomorphe à la droite réelle ; en effet,  $X$  étant homéomorphe au plan, le cône isotrope définit deux feuilletages de lumière dont les feuilles sont homéomorphes à la droite réelle, et qui sont de plus partout transverses à  $K$  du fait que la norme du champ ne s'annule pas. L'espace des feuilles peut alors être paramétré par une géodésique de lumière maximale. Dans la suite, nous supposons que  $X$  est non élémentaire.

Nous verrons que certaines données géométriques de la surface ont des conséquences sur la topologie de l'espace des feuilles ; nous distinguons en particulier les cas suivants :

1.  $X$  maximale ;
2.  $X$  L-complète ;
3.  $X$  analytique et maximale.

On rappelle qu'une surface munie d'un champ de Killing L-complète est maximale et n'a pas de selles à l'infini (i.e. toute orbite de lumière du champ est incluse dans une géodésique de lumière complète, cf. [3, Définition 3.2]).

On appelle "point de branchement" de  $\mathcal{E}_X$  un point non séparé de cette variété. Notons  $B$  l'ensemble de ces points, et  $\Sigma$  l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E}_X - B$ . Pour la suite, il convient de poser les deux définitions suivantes :

**Définition 2.1.1.** *Un point de branchement  $p$  de  $\mathcal{E}_X$  est dit simple si l'ensemble  $V_p$  des points  $q \neq p$  non séparés de  $p$  possède l'une des deux propriétés suivantes :*

- $V_p$  est réduit à un point ;
- $V_p$  contient exactement deux points distincts qui sont eux-mêmes séparés.

**Définition 2.1.2.** *Un branchement d'ordre  $n \in \mathbf{N}_{\geq 3}$  est un cycle d'ordre  $n$  de points de branchement simples. Autrement dit, une famille de points  $(p_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$  telle que pour tout  $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ,  $p_i$  est un point de branchement simple, avec  $V_{p_i} = \{p_{i-1}, p_{i+1}\}$  et  $p_{i-1}, p_{i+1}$  séparés.*

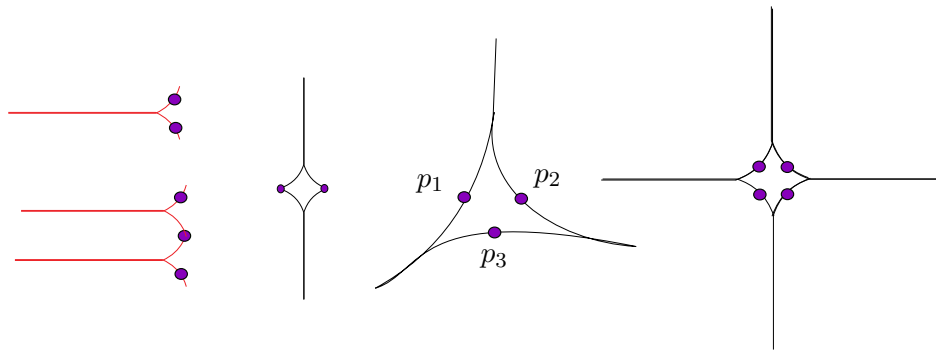


FIGURE 2.1 – Branchements simples; branchements d'ordre 3 et 4

On parlera également de "*branchement d'ordre infini*", pour lequel les points de branchement simples (en nombre infini) sont indexés par  $\mathbf{Z}$  au lieu de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , et de "*branche-ment fini*", pour lequel ces points sont indexés par une partie finie de  $\mathbf{N}$ .

Les points de branchement possibles dans la variété des feuilles sont décrits dans [3], p. 34. Nous exposons d'abord l'essentiel de ce qui est dit avant de pouvoir décrire complètement la topologie de cette variété. Les points de branchement de  $\mathcal{E}_X$  correspondent précisément aux orbites de lumière de  $K$  qui bordent les carrés de  $X$ ; autrement dit, aux bords des composantes connexes de  $\{\langle K, K \rangle \neq 0\}$  dans  $X$ . Lorsque  $X$  est **maximale**, la variété des feuilles est composée

- d'intervalles  $I_i, i \in I$ , tels que  $\{\langle K, K \rangle \neq 0\} = \amalg_{i \in I} I_i$  et

$$\overline{I_i}^{\mathcal{E}_X} = \begin{cases} \text{Diagram 1} & \text{l'espace des feuilles d'un carré} \\ \text{ou} \\ \text{Diagram 2} & \text{l'espace des feuilles d'une bande de type III voisine de l'infini} \end{cases}$$

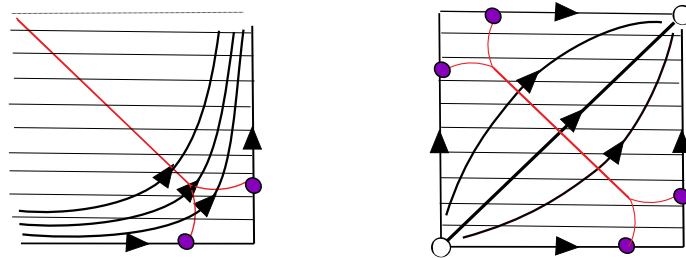


FIGURE 2.2 – L'espace des feuilles d'une bande de type III (à gauche) et d'un carré (à droite)

- d'intervalles  $J_j, j \in J$ , tels que  $\{\langle K, K \rangle = 0\} = \amalg_{j \in J} J_j$ , et

$$\overline{J_j}^{\mathcal{E}_X} = \begin{cases} \text{Diagram 1} & \text{l'espace des feuilles de l'adhérence d'une composante de } \langle K, K \rangle = 0 \\ \text{ou} \\ \text{Diagram 2} & \text{l'espace des feuilles de l'adhérence d'une composante voisine de l'infini} \end{cases}$$

Ceci est équivalent à dire que lorsque  $X$  est maximale, et si  $U$  est une composante connexe de  $X - \{\langle K, K \rangle = 0\}$ , alors l'adhérence de  $U$  dans  $X$  privée des zéros de  $K$  est soit un carré lorentzien soit une bande de type III; ceci est démontré dans la Proposition 2.20 [3]. Notons que si  $X$  n'est pas maximale, les intervalles de  $\mathcal{E}_X - B$  dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}_X$  est un segment à bord séparé, sont les espaces des feuilles de bandes de type I ou II, de demi-bandes, ou de composantes du fermé  $F := \{\langle K, K \rangle = 0\}$ .

Ces segments peuvent s'accumuler. Enfin, dans le fermé  $F$  feuilleté par des orbites de lumière de  $K$  on trouvera également des points séparés qui apparaissent comme points d'accumulation de branchements simples (sortes de bandes -feuilletées par des orbites de lumière de  $K$  - écrasées).

Une feuille de lumière de  $K$  isolée dans  $F$  borde deux carrés adjacents. Notons  $f$  la fonction induite par la norme du champ dans le ruban contenant cette feuille. La figure suivante montre comment les segments correspondants aux carrés sont raccordés dans l'espace des feuilles, suivant que  $f$  change de signe ou pas.

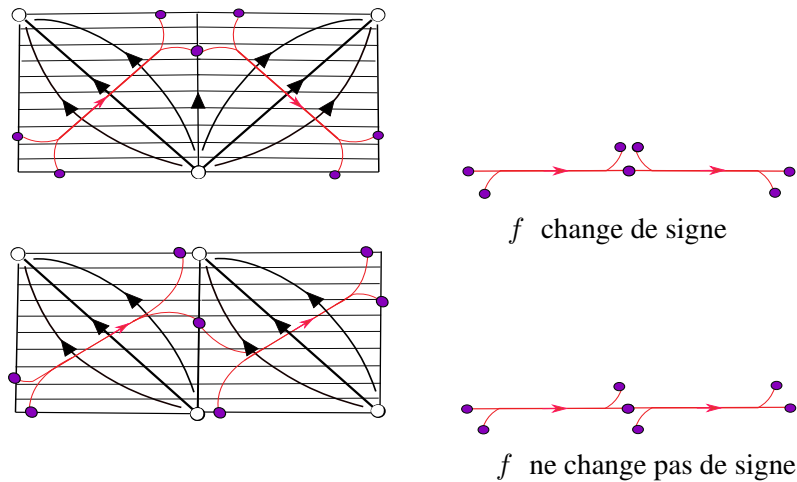


FIGURE 2.3 – Raccordement des carrés dans l'espace des feuilles



FIGURE 2.4 – Présence d'une composante feuilletée par des orbites de lumière de  $K$

D'un point de vue topologique, les espaces des feuilles représentés dans la figure 2.3 sont les mêmes. La seule considération de l'espace des feuilles ne suffit donc pas à caractériser le feuilletage. Par exemple, à une variété possédant 3 points de branchement simples, on peut associer deux classes de conjugaison pour les feuilletages non orientés (voir [14]; dans cet article, Godbillon donne une classification topologique des feuilletages du plan dont l'espace des feuilles admet un nombre fini de points de branchement).

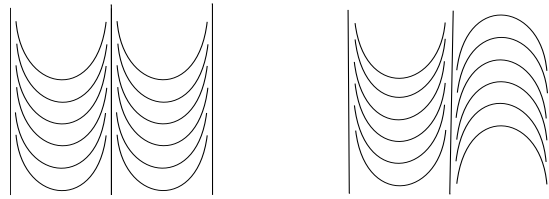


FIGURE 2.5 – Deux classes de feuilletages associés à une variété à 3 points de branchement simples

**Definition 2.1.3.** Une variété lisse  $\mathcal{E}$  de dimension 1 est dite « étalée dans  $\mathbf{R}$  » si et seulement s'il existe un difféomorphisme local de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbf{R}$ .

Étant donnée une variété de dimension 1 étalée dans  $\mathbf{R}$  et orientée, on distingue dans la définition qui suit deux types de non séparation pour ses points de branchement.

**Definition 2.1.4.** Soit  $\mathcal{E}$  une variété de dimension 1 étalée dans  $\mathbf{R}$  par une fonction  $x \in C^\infty(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ . Soient  $p$  et  $q$  deux points non séparés de  $\mathcal{E}$ . On dira que  $p$  et  $q$  ne sont pas séparés à droite (resp. à gauche) et on note  $p \mathcal{R}_d q$  (resp.  $p \mathcal{R}_g q$ ) si, étant donnés deux voisinages  $V_p$  et  $V_q$  de  $p$  et  $q$  respectivement,  $x(V_p \cap V_q)$  est à droite (resp. à gauche) de  $x_0$ .

Il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{R}_d$  et  $\mathcal{R}_g$  sont des relations d'équivalence. Si  $p$  est un point non séparé de  $\mathcal{E}$ , on note  $[p]_d$  (resp.  $[p]_g$ ) la classe d'équivalence de  $p$  pour la relation  $\mathcal{R}_d$  (resp.  $\mathcal{R}_g$ ). Lorsque  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$  pour une certaine surface lorentzienne  $(X, K)$  simplement connexe, les points non séparés de  $\mathcal{E}_X$  sont des points de branchement simples ; par conséquent, ces classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou 2.

**Remarque 2.1.5.** Si  $p$  est un point non séparé de  $\mathcal{E}_X$  tel que  $\#[p]_d = \#[p]_g = 2$ , alors l'orbite de lumière de  $K$  correspondante est isolée dans le fermé  $F := \{\langle K, K \rangle = 0\}$ , car alors elle borde deux bandes dans  $X$  ; la réciproque est vraie si de plus  $X$  est supposée maximale (voir la preuve de la Proposition 2.1.6).

On rappelle qu'un branchement infini est défini comme un cycle infini dénombrable de points de branchement simples (cf. commentaire qui suit les définitions 2.1.1 et 2.1.2). On dira qu'un branchement infini est borné à droite (resp. à gauche) s'il contient un point de branchement  $p$  tel que  $\#[p]_d = 1$  (resp.  $\#[p]_g = 1$ ) ; ce point est alors appelé "bord à droite" (resp. "à gauche") du branchement infini. Une chaîne de points de branchement qui est bornée à droite et à gauche est un branchement fini.

Si  $p$  est le bord dans  $\mathcal{E}_X$  d'un branchement fini, ou infini borné d'un côté, i.e.  $\#[p]_d = 1$  ou  $\#[p]_g = 1$ , alors il apparaîtra dans la preuve de la Proposition 2.1.6 (voir aussi la Remarque 2.1.5 ci-dessus) que l'orbite de lumière  $l_p$  correspondante dans  $X$  n'est pas isolée dans le fermé  $\{\langle K, K \rangle = 0\}$ . Si la norme du champ est identiquement nulle à gauche (resp. à droite) de  $p$  (ici "gauche" et "droite" font référence à une orientation sur l'espace des feuilles), alors  $l_p$  est le bord à gauche (resp. à droite) d'une partie dans  $X$  feuilletée par des orbites de lumière de  $K$  ; par conséquent,  $p$  est le bord à gauche (resp. à droite) d'une composante de  $\Sigma$  d'adhérence séparée dans  $\mathcal{E}_X$ . Si  $\#[p]_d = 1$  (resp.  $\#[p]_g = 1$ ) et



si la norme du champ n'est pas identiquement nulle à droite (resp. à gauche) de  $p$ , alors dans le ruban contenant  $l_p$  on a des bandes qui s'accumulent sur  $l_p$ , et  $p$  apparaît alors comme un point non isolé dans le sous-ensemble des points de branchement séparés de  $p$ . Cela nous conduit à définir la propriété  $(\mathcal{P})$  suivante :

$(\mathcal{P})$  : si  $p$  est le bord dans  $\mathcal{E}$  d'un branchement fini, ou infini borné d'un côté, alors  $p$  n'est pas isolé dans le sous ensemble des points de  $B$  séparés de  $p$ , ou  $p$  est le bord d'une composante de  $\Sigma$  d'adhérence séparée dans  $\mathcal{E}$ .

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne non élémentaire simplement connexe munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial. Alors  $\mathcal{E}_X$  est une variété (connexe) de dimension 1 à base dénombrable (en général non séparée), dont les points non séparés sont des points de branchement simples raccordés en leurs extrémités comme sur les figures 2.3 et 2.4. Et*

1. *si  $X$  est maximale sans zéro de  $K$ , alors  $\mathcal{E}_X$  est simplement connexe et vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ . De plus, sur un branchement fini ou infini fixé, les orbites de lumière correspondantes du champ sont toutes de même nature (complètes ou pas).*
2. *si  $X$  est L-complète, alors  $\mathcal{E}_X$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ , et les seuls cycles de points de branchement simples sont des cycles d'ordre 4.*

*Démonstration.* 1) Supposons que  $X$  est maximale sans zéro du champ. Étant donné que  $K$  n'a pas de zéro, on a un feuilletage du plan, et la simple connexité découle de la Proposition 1 p. 121, [19].

Pour montrer la deuxième partie, considérons  $U$  un domino lorentzien contenu dans  $X$  et  $f \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ ,  $I = \mathbf{x}(U)$ , la fonction telle que  $f \circ \mathbf{x} = \langle K, K \rangle$ . Posons  $x_0 = 0$  en l'unique zéro de  $f(x)$  dans  $I$ , et fixons une composante  $U_0 = ]-m, 0] \times \mathbf{R}$  de  $U - \{\langle K, K \rangle = 0\}$ ; où  $m \in \mathbf{R}$  est la longueur du segment  $\mathcal{E}_{U_0}$ . En prenant la carte adaptée induite par l'autre feuilletage de lumière, on a un ruban  $\hat{U}_0 = ]0, m[ \times \mathbf{R}$ ,  $2dx dy + \hat{f}(x) dy^2$ , tel que  $\hat{f}(x) = f(m - x)$ , contenu dans  $U$ , et qui est maximal dans celui-ci. Il est clair que  $\hat{f}$  s'étend en une fonction  $g$  définie sur un intervalle  $]0, m'[$ ,  $m' > m$ , puisque  $\hat{f}$  a le même germe en  $x = m$  que  $f$  en  $x = 0$ . On définit alors une extension propre de  $U$  en recollant un ruban  $R_g$  le long de  $U_0$  à l'aide d'une réflexion de  $U_0$ . Ainsi, si  $X$  contient un domino  $U$ , elle contient aussi, par maximalité, une extension de  $U$  de la forme précédente. Si on note  $p$  le point de branchement dans  $\mathcal{E}_X$  correspondant à l'orbite (isolée) de lumière de  $K$  dans  $U$ , cela entraîne en particulier que  $\#[p]_d = \#[p]_g = 2$ . De plus,  $x = 0$  est un zéro simple de  $f$  si et seulement si  $x = m$  est un zéro simple de  $g$ ; par conséquent, les orbites de lumière de  $K$  correspondantes sont de même nature, complète ou pas (cf. Remarque 3.3.15). Pour conclure, remarquons que  $\mathcal{E}_X$  ne peut contenir un branchement d'ordre fini puisqu'elle est simplement connexe; ces opérations donnent alors forcément un branchement fini ou infini, lesquels vérifient la propriété  $(\mathcal{P})$ .

2) Supposons maintenant que  $X$  est L-complète, et considérons un domino lorentzien  $U$  contenu dans  $X$ . On a deux situations distinctes :

- Si l'orbite de lumière de  $K$  est semi-complète, la seule façon de la compléter est de rajouter un point selle, cf. [3]. Par conséquent,  $U$  est contenu dans une selle de  $X$ , et  $\mathcal{E}_X$  au voisinage de cette singularité du champ est un branchement d'ordre 4.



- Si l'orbite de lumière de  $K$  est complète, on montre que  $X$  contient une extension du domino de la forme obtenue dans 1). Si on parvient donc à montrer que  $\mathcal{E}_X$  ne contient pas de branchement d'ordre fini en dehors d'une selle, alors cette construction donne forcément un branchement fini ou infini vérifiant la propriété  $(\mathcal{P})$  (rappelons qu'une surface L-complète est maximale). Pour ce faire, remarquons qu'un branchement d'ordre fini dans  $\mathcal{E}_X$  donne lieu à un cycle de rubans dans  $X$ . Or,  $X$  étant simplement connexe, tout cycle de rubans, d'après le Lemme 3.13, [3], est constitué de 4 rubans autour d'un point selle. Ce qui achève la preuve.

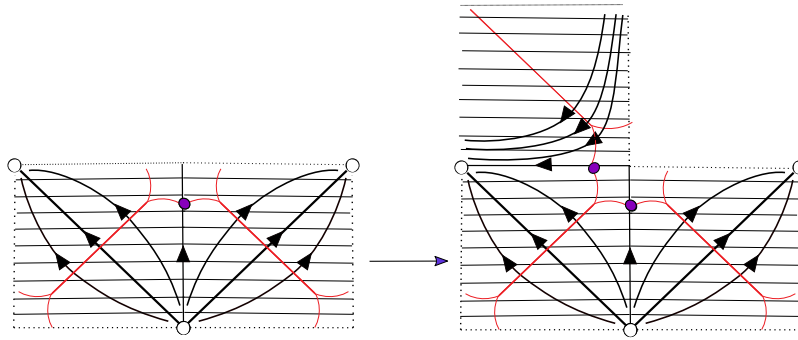


FIGURE 2.6 – Extension d'un domino via une réflexion locale

□

Sur  $\mathcal{E}_X$  on peut définir la relation binaire suivante : pour  $p, q \in \mathcal{E}_X$ ,  $p\mathcal{R}q$  si et seulement si  $p$  et  $q$  ne sont pas séparés. Évidemment,  $\mathcal{R}$  n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive ; on définit alors  $\tilde{\mathcal{R}}$  comme la relation d'équivalence engendrée par  $\mathcal{R}$ .

**Definition 2.1.7.** On appelle "le séparé de  $\mathcal{E}_X$ ", noté  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_X)$ , le graphe obtenu en quotientant  $\mathcal{E}_X$  par la relation d'équivalence  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Autrement dit,  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_X) := \mathcal{E}_X / \tilde{\mathcal{R}}$ .

**Proposition 2.1.8.** Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial. Alors  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_X)$  est un arbre pouvant admettre des sommets de valence infinie, ainsi que des branches infinies.

*Démonstration.* On sait que les seuls cycles de  $\mathcal{E}_X$  sont les branchements d'ordre 4, conséquence du Lemme 3.13, [3]. La définition du séparé de  $\mathcal{E}_X$  fait que le graphe obtenu est alors un arbre. □

**Remarque 2.1.9.** Si  $(X, K)$  est une surface lorentzienne avec champ de Killing  $K$ , la fonction  $f \in C^\infty(\mathcal{E}_X, \mathbf{R})$  induite par la norme du champ s'annule sur tous les points non séparés de  $\mathcal{E}_X$ , et vérifie la propriété suivante : si  $f$  est de rang 1 (resp. de rang 0) en un point  $p$  de  $\mathcal{E}_X$ , elle est également de rang 1 (resp. de rang 0) en tout point  $q$  non séparé de  $p$ .

**Remarque 2.1.10.** Dans [19] p. 115, les auteurs définissent une structure différentielle sur le branchement simple telle que toute fonction de classe  $C^\infty$  définie dessus est de rang 0 à l'origine. Ils donnent de même des exemples de variétés de dimension 1 admettant une structure différentiable de classe  $C^\infty$  telle que toutes les fonctions différentiables sur ces

variétés se réduisent à des constantes. Cette propriété pathologique est écartée dans le cas de  $\mathcal{E}_X$  du fait qu'il existe une fonction  $\mathbf{x} : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathbf{R}$  qui est un difféomorphisme local, donc partout de rang 1. En particulier, si  $h \in C^\infty(\mathcal{E}_X, \mathbf{R})$  il n'y a aucune contrainte sur les zéros de  $h$  à part celle donnée dans la Remarque 2.1.9.

### Géodésiques distinguées de l'espace des feuilles

Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne maximale simplement connexe admettant un champ de Killing  $K$  non trivial. Rappelons que  $\mathcal{E}_X$  est étalée dans  $\mathbf{R}$  par un difféomorphisme local  $\mathbf{x} \in C^\infty(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ ; en particulier,  $\mathcal{E}_X$  est orientable, orientée par  $d\mathbf{x}$ . L'orientation de  $K$  induit un ordre sur les paires de points  $\{p_1, p_2\}$ , où  $p_1$  et  $p_2$  sont deux points non séparés de  $\mathcal{E}_X$ . Nous noterons  $(p_1, p_2)$ ,  $p_1 < p_2$ , la paire ordonnée d'origine  $p_1$  et d'extrémité  $p_2$ .

**Definition 2.1.11.** On appelle "géodésique distinguée" de  $\mathcal{E}_X$  une géodésique orientée associée à un ruban, et qui est maximale.

L'intersection de deux géodésiques distinguées est soit vide soit un élément de  $\Sigma$  dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}_X$  est un segment fermé ou un intervalle semi-fermé, à bord double.

Soit  $\gamma$  une telle géodésique, et soit  $\sigma$  une composante connexe de  $\mathcal{E}_X - B$  contenue dans  $\gamma$ , dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}_X$  est un segment fermé à bord double. Le bord du segment est donné par deux paires ordonnées  $(p_1, p_2)$  et  $(q_1, q_2)$ . La géodésique est caractérisée par le fait qu'elle passe par  $p_1$  et  $q_2$  (ou  $p_2$  et  $q_1$ ), ceci pour toute composante  $\sigma$  de  $\mathcal{E}_X - B$  contenue dans  $\gamma$ , dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}_X$  est un segment fermé à bord double.

**Notation :** On rappelle que l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E}_X - B$  est noté  $\Sigma$ . On notera  $\Sigma_0$  le sous-ensemble de  $\Sigma$  des éléments dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}_X$  est un segment fermé à bord double.

Pour  $\sigma \in \Sigma_0$  fixé, notons  $\partial_1\sigma$  (resp.  $\partial_2\sigma$ ) le bord à gauche (resp. à droite) de  $\sigma$  composé de deux points non séparés. Il y a deux géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}_X$  contenant  $\sigma$ , et celles-ci définissent une bijection  $\mu_\sigma : \partial_1\sigma \rightarrow \partial_2\sigma$ .

Soit maintenant  $\phi : (X_1, K_1) \rightarrow (X_2, K_2)$  une isométrie entre deux surfaces lorentziennes simplement connexes préservant l'orientation des espaces des feuilles. Alors  $\phi$  induit un difféomorphisme  $h : \mathcal{E}_{X_1} \rightarrow \mathcal{E}_{X_2}$  tel que  $x_1 = x_2 \circ h + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , et  $f_1 = f_2 \circ h$ . De plus,  $h$  induit une bijection  $\bar{h} : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma'_0$ , et pour tout  $\sigma \in \Sigma_0$  et  $\sigma' \in \Sigma'_0$  tels que  $\bar{h}(\sigma) = \sigma'$ , on a  $\mu'_\sigma = h \circ \mu_\sigma \circ h^{-1}$ . Cela revient à dire que  $h$  envoie les géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}_{X_1}$  sur celles de  $\mathcal{E}_{X_2}$ .

### Géodésiques distinguées d'une variété étalée

**Definition 2.1.12.** Soit  $\mathcal{E}$  une variété de dimension 1 à base dénombrable, étalée dans  $\mathbf{R}$ . On dit que  $\mathcal{E}$  admet une topologie  $\mathfrak{T}$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Les points non séparés sont des points de branchement simples, vérifiant la propriété (P).
- (2) Les seuls cycles de points de branchement simples sont des cycles d'ordre 4.
- (3) Le séparé de  $\mathcal{E}$  est un arbre.

Soit  $\mathcal{E}$  une variété lisse étalée dans  $\mathbf{R}$  admettant une topologie  $\mathfrak{T}$ . Pour tout élément  $\sigma \in \Sigma_0$ , dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}$  est notée  $\bar{\sigma}$ , il existe un homéomorphisme de  $\mathcal{E}$  qui fixe les deux points non séparés à droite et permute les deux points non séparés à gauche de  $\bar{\sigma}$ , donc on voit que la seule donnée topologique de la variété  $\mathcal{E}$  ne permet pas de distinguer les points non séparés, et donc de définir une notion de géodésique distinguée qui coïncide avec celle donnée dans la Définition 2.1.11 pour  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ . Nous introduisons donc une donnée supplémentaire sur  $\mathcal{E}$ , que nous appelons « une assignation » et qui permet de définir des géodésiques distinguées sur  $\mathcal{E}$ , telle qu'un homéomorphisme  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  envoie les géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}$  sur celles de  $\mathcal{E}'$  si et seulement si cette donnée est invariante par  $h$ .

Soit  $\mathcal{E}$  une variété étalée dans  $\mathbf{R}$  de topologie  $\mathfrak{T}$ . Fixons  $\sigma \in \Sigma_0$ ; il y a deux bijections possibles de  $\partial_1\sigma = \{a, a'\}$  dans  $\partial_2\sigma = \{b, b'\}$ . La donnée d'une bijection  $\phi_\sigma$  détermine deux chemins distincts sur  $\bar{\sigma}$  dont l'intersection est  $\sigma$ ; ils sont donnés par  $[a \rightarrow \phi_\sigma(a)]$  et  $[a' \rightarrow \phi_\sigma(a')]$ .

**Définition 2.1.13.** *Soit  $\mathcal{E}$  une variété étalée dans  $\mathbf{R}$  de topologie  $\mathfrak{T}$ . Fixons une bijection  $\phi_\sigma$  pour chaque élément  $\sigma \in \Sigma_0$ . Une géodésique de  $\mathcal{E}$  est dite **distinguée** si pour tout  $\sigma \in \Sigma_0$ , la géodésique suit un chemin défini par  $\phi_\sigma$ .*

Comme il n'y a pas de cycle dans le séparé  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{E}$ , ces géodésiques sont bien définies.

**Définition 2.1.14.** *Soit  $\mathcal{E}$  une variété étalée dans  $\mathbf{R}$  de topologie  $\mathfrak{T}$ . Une **assignation**  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{E}$  est la donnée d'une bijection  $\mathcal{A}_\sigma : \partial_1\sigma \rightarrow \partial_2\sigma$  pour chaque élément  $\sigma \in \Sigma_0$ .*

Il y a donc une bijection entre le nombre d'assignations associées à  $\mathcal{E}$  et le nombre de façons dont on peut définir des géodésiques distinguées sur la variété.

**Remarque 2.1.15.** *Si  $\mathcal{E}$  est une variété de dimension 1 étalée dans  $\mathbf{R}$  et de topologie  $\mathfrak{T}$ , alors l'intersection de deux géodésiques distinguées distinctes de  $\mathcal{E}$  est soit vide soit une composante connexe de  $\mathcal{E} - B$ .*

Soit maintenant  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  un homéomorphisme entre deux variétés étalées dans  $\mathbf{R}$  et de topologie  $\mathfrak{T}$ . Soit  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ) une assignation sur  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{E}'$ ). Sur chaque élément  $\sigma \in \Sigma_0$  (resp.  $\sigma' \in \Sigma'_0$ ), on a donc une bijection  $\mathcal{A}_\sigma$  (resp.  $\mathcal{A}'_{\sigma'}$ ); cela définit une famille de géodésiques distinguées sur chacune des deux variétés. L'homéomorphisme  $h$  envoie les géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}$  sur celles de  $\mathcal{E}'$  si et seulement si pour tous  $\sigma \in \Sigma_0$  et  $\sigma' \in \Sigma'_0$  tels que  $h(\sigma) = \sigma'$ , on a

$$\mathcal{A}'_{\sigma'} = h \circ \mathcal{A}_\sigma \circ h^{-1}. \quad (2.1)$$

**Écriture dans des coordonnées.** Pour écrire cette donnée supplémentaire sur  $\mathcal{E}$  qui détermine les géodésiques distinguées de la variété, on définit dans ce qui suit des « coordonnées » sur les bords des éléments de  $\Sigma_0$ . Sur chaque classe d'équivalence de cardinal 2 de points non séparés à gauche (ou à droite) il y a 2 ordres possibles sur les points de branchement. On fixe un ordre sur chaque classe d'équivalence en attribuant  $(0, 1)$  ou

(1, 0) à chaque paire de tels points.

**Notation :** On note  $\partial\Sigma_0$  l'ensemble des points de branchement de  $\mathcal{E}$  adhérents aux éléments de  $\Sigma_0$ .

**Definition 2.1.16.** Soit  $\mathcal{E}$  une variété étalée dans  $\mathbf{R}$  de topologie  $\mathfrak{T}$ . Des coordonnées sur  $\partial\Sigma_0$  est la donnée d'un ordre sur le bord à gauche et à droite de chaque élément de  $\Sigma_0$ . De telles coordonnées seront notées  $\mathcal{C}$ .

Soit  $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$  une variété étalée dans  $\mathbf{R}$  et de topologie  $\mathfrak{T}$ , munie de coordonnées  $\mathcal{C}$  sur  $\partial\Sigma_0$ . Soit  $\sigma \in \Sigma_0$  comme sur la figure ci-dessous avec l'ordre sur  $\partial_1\sigma$  et  $\partial_2\sigma$  induit par  $\mathcal{C}$ . Une bijection de  $\partial_1\sigma$  dans  $\partial_2\sigma$  définit alors un élément  $i \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  tel que

$$i : a_j \mapsto b_k, \text{ avec } j + k \equiv i[2]. \quad (2.2)$$

Réciproquement, lorsque des coordonnées  $\mathcal{C}$  sont fixées sur  $\partial\Sigma_0$ , un élément dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  détermine via la relation (2.2) une bijection de  $\partial_1\sigma$  dans  $\partial_2\sigma$ .

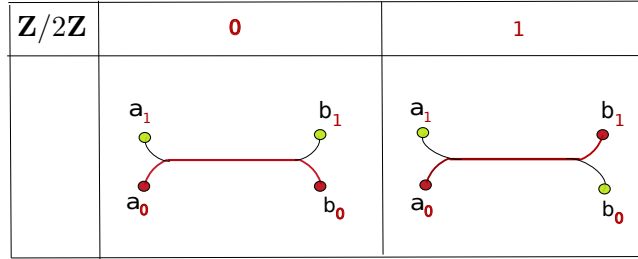


FIGURE 2.7 – Géodésiques distinguées

Lorsque des coordonnées  $\mathcal{C}$  sont fixées sur  $\partial\Sigma_0$ , la donnée d'une assignation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{E}$  est équivalente à la donnée d'une application  $\mu : \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Les géodésiques distinguées de la variété se définissent alors via la relation (2.2). On appelle ces géodésiques « les géodésiques distinguées associées à  $\mu$  relativement à  $\mathcal{C}$  ».

Soit  $h : (\mathcal{E}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{E}', \mathcal{A}')$  un homéomorphisme entre deux variétés étalées dans  $\mathbf{R}$  et de topologie  $\mathfrak{T}$ , tel que

$$\mathcal{A}' = h \circ \mathcal{A} \circ h^{-1}. \quad (2.3)$$

On munit  $\partial\Sigma_0$  (resp.  $\partial\Sigma'_0$ ) de coordonnées  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{C}'$ ), et on note  $\mu : \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  (resp.  $\mu'$ ) l'application induite par  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ). On définit l'application  $h \cdot \mu$  induite sur  $\mathcal{E}'$  par  $h$  de la façon suivante :

soit  $\sigma \in \Sigma_0$  et  $\sigma' \in \widehat{\Sigma}'_0$  tels que  $h(\sigma) = \sigma'$ , et tels que leurs bords respectifs sont donnés par  $\partial\sigma = [(a_0, a_1), (b_0, b_1)]$  et  $\partial\sigma' = [(a'_0, a'_1), (b'_0, b'_1)]$ , où l'ordre sur les points de branchement est celui induit par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Écrivons  $(h(a_j), h(b_k)) = (a'_{j'}, b'_{k'})$ , où  $j + k \equiv i[2]$ , avec  $i = \mu(\sigma) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . On pose  $h \cdot \mu(\sigma) := i' \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , où  $j' + k' \equiv i'[2]$ . Il apparaît alors que la relation (2.3) est équivalente à  $\mu' = h \cdot \mu$ .

**Fait 2.1.17.** Soit  $h : (\mathcal{E}, \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{E}', \mathcal{C}')$  un homéomorphisme entre deux variétés étalées dans  $\mathbf{R}$  et de topologie  $\mathfrak{T}$ , munies de coordonnées  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  respectivement. Alors  $h$  envoie les géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}$  (associées à  $\mu$  relativement à  $\mathcal{C}$ ) sur celles de  $\mathcal{E}'$  (associées à  $\mu'$  relativement à  $\mathcal{C}'$ ) si et seulement si  $\mu' = h \cdot \mu$ .

**Exemple 2.1.18.** Dans l'exemple suivant, les bandes **A** et **B** ne sont pas isométriques, ainsi que **A** et **C**. On a deux surfaces  $(X_1, K_1)$  et  $(X_2, K_2)$  telles que les variétés  $\mathcal{E}_{X_1}$  et  $\mathcal{E}_{X_2}$  sont homéomorphes, et l'homéomorphisme  $h : \mathcal{E}_{X_1} \rightarrow \mathcal{E}_{X_2}$  agit sur l'unique élément  $\sigma \in \Sigma_0$  en fixant les deux points non séparés à gauche et permutant ceux à droite. Cet homéomorphisme préserve la structure de translation et échange les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  induites par la norme du champ. Il apparait donc que la seule donnée topologique de  $\mathcal{E}$  et du couple  $(x, f)$  ne suffit pas pour déterminer la classe d'isométrie de la surface.

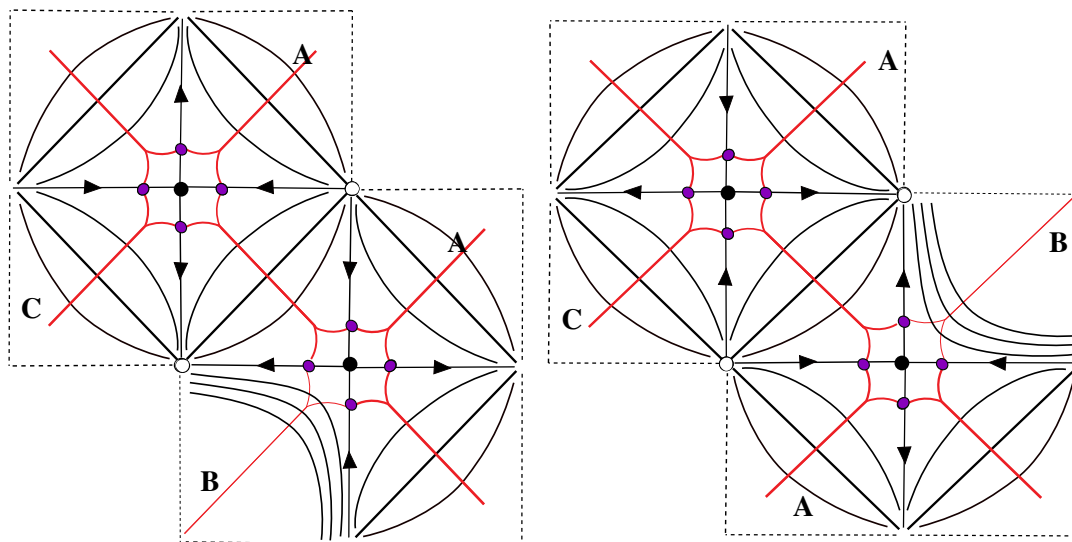


FIGURE 2.8 – Deux surfaces non isométriques

## 2.2 Correspondance entre surfaces maximales et variétés étalées

Dans ce paragraphe, nous donnons une description des surfaces lorentziennes simplement connexes et maximales, admettant un champ de Killing non trivial.

Si  $\mathcal{E}$  est une variété de dimension 1 non séparée, on rappelle que  $B$  désigne l'ensemble des points de branchement de  $\mathcal{E}$ ,  $\Sigma$  l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E} - B$ , et enfin  $\Sigma_0$  le sous-ensemble de  $\Sigma$  des éléments d'adhérence un segment fermé à bord double. On rappelle la définition suivante

**Definition 2.2.1.** Soit  $\mathcal{E}$  une variété de dimension 1 à base dénombrable, étalée dans  $\mathbf{R}$ . On dit que  $\mathcal{E}$  admet une topologie  $\mathfrak{T}$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Les points non séparés sont des points de branchement simples, vérifiant la propriété ( $\mathcal{P}$ ).
- (2) Les seuls cycles de points de branchement simples sont des cycles d'ordre 4.
- (3) Le séparé de  $\mathcal{E}$  est un arbre.

**Lemme 2.2.2.** Soit  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  telle que  $f$  a un zéro unique en 0. Soit  $G$  une primitive de  $-1/f$  sur  $] -\infty, 0[$ . On a  $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \infty$ .

*Démonstration.* On utilise le fait que si  $f$  est une fonction  $C^\infty$  nulle en 0, alors  $f(x)/x$  se prolonge en une application  $C^\infty$ .  $\square$

**Proposition 2.2.3.** *La donnée d'une surface lorentzienne, à isométrie près, simplement connexe et maximale  $X$  admettant un champ de Killing  $K$  non trivial est équivalente à la donnée de*

1. *une variété  $\mathcal{E}$  (connexe) de dimension 1 à base dénombrable, et de topologie  $\mathfrak{T}$ ,*
2. *une assignation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{E}$ ,*
3. *une fonction étale  $\mathbf{x} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ , définie modulo translation et changement de signe, définissant sur  $\mathcal{E}$  une structure de translation,*
4. *une fonction  $f \in C^\infty(\mathcal{E}, \mathbf{R})$  inextensible tel que le fermé  $\{f = 0\}$  est composé*
  - (a) *des points non séparés de  $\mathcal{E}$ , avec des zéros simples sur les cycles d'ordre 4 et multiples sur les cycles finis ou infinis.*
  - (b) *des éléments  $I \in \Sigma$  dont l'adhérence dans  $\mathcal{E}$  est séparée.*

*Si  $X$  est une telle surface, l'action du groupe diédral  $D_2$  sur  $\mathbf{x}$  par translation et changement de signe induit une action -à droite- de  $D_2$  qui consiste à remplacer  $f(\mathbf{x})$  par  $f(\epsilon\mathbf{x} + b)$ , pour  $(\epsilon, b) \in \{\pm 1\} \times \mathbf{R}$ .*

*De plus, une isométrie  $\phi : (X_1, K_1) \rightarrow (X_2, K_2)$  entre deux telles surfaces préservant l'orientation des espaces des feuilles induit un difféomorphisme  $h : \mathcal{E}_{X_1} \rightarrow \mathcal{E}_{X_2}$  tel que  $\mathcal{A}_1 = h \circ \mathcal{A}_2 \circ h^{-1}$ ,  $x_1 = x_2 \circ h + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , et  $f_1 = f_2 \circ h$ .*

*Démonstration.* La donnée d'une surface lorentzienne  $(X, K)$  simplement connexe et maximale munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial définit un quadruplet  $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathbf{x}, f)$ , où  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ ,  $\mathcal{A}$  est définie par les géodésiques distinguées déterminées par l'orientation du champ,  $\mathbf{x} \in C^\infty(\mathcal{E}_X, \mathbf{R})$  est un difféomorphisme local induit par la coordonnée transverse de  $X$  modulo translation et changement de signe,  $f \in C^\infty(\mathcal{E}_X, \mathbf{R})$  est la fonction induite par la norme du champ; cette dernière vérifie bien la condition (a), et vérifie aussi (b) par maximalité de  $X$ .

Inversement, soit  $\mathcal{E}$  une variété de dimension 1 admettant une topologie  $\mathfrak{T}$ , soit  $\mathbf{x} \in C^\infty(\mathcal{E}, \mathbf{R})$  une fonction étalée, et  $f \in C^\infty(\mathcal{E}, \mathbf{R})$  une fonction qui vérifie les conditions (a), (b) et (c). Nous allons montrer qu'il existe une unique métrique lorentzienne sur le plan admettant un champ de Killing telle que : (i) la variété des feuilles du champ est homéomorphe à  $\mathcal{E}$  et les géodésiques distinguées de la métrique coïncident avec celles définies par l'assignation  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{E}$ , (ii) la norme du champ est donnée par  $f$ , (iii) et la structure riemannienne induite sur  $\mathcal{E}$  par la métrique coïncide avec celle donnée par  $d\mathbf{x}^2$ . On définit dans ce qui suit deux familles disjointes de cartes recouvrant  $\mathcal{E}$  :

- On note  $G_\mathcal{E}$  l'ensemble des géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}$  (c'est un ensemble dénombrable) déterminées par  $\mathcal{A}$ , et on définit la correspondance qui à une géodésique  $c \in G_\mathcal{E}$  associe le sous ensemble de  $G_\mathcal{E}$  contenant les géodésiques distinguées qui rencontrent  $c$  en un élément de  $\Sigma$ . On note cette image  $c^\vee$ .
- On définit la propriété (P<sub>0</sub>) : " $c \in \mathcal{P} \implies c^\vee \subset \mathcal{Q}$  et  $c \in \mathcal{Q} \implies c^\vee \subset \mathcal{P}$ ".

- Fixons  $c_0 \in G_{\mathcal{E}}$ , et posons  $c_0 \in \mathcal{P}$ . On définit en utilisant le lemme de Zorn deux ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  maximaux dans  $G_{\mathcal{E}}$ , vérifiant la propriété  $(P_0)$ , et tels que  $c_0 \in \mathcal{P}$ . On appelle "recouvrement minimal" associé à  $\mathcal{E}$  l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{E}$  appartenant à  $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ , recouvrant  $\mathcal{E}$ .

Les composantes connexes (en nombre dénombrable) de  $\mathcal{E} - B$  sont de deux types : celles d'adhérence séparée dans  $\mathcal{E}$  et celles d'adhérence non séparée. On note  $\Sigma_1$  le sous ensemble de  $\Sigma$  contenant les segments d'adhérence non séparée. Pour tout  $\mathfrak{a} \in \mathcal{P}$  et tout  $\mathfrak{b} \in \mathcal{Q}$ ,  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \emptyset$  ou  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \sigma \in \Sigma_1$  (cf. Remarque 2.1.15).

- On paramètre bijectivement les éléments de  $\Sigma_1$  par une partie  $A$  de  $\mathbf{Z}$  de sorte que si  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  est une indexation d'un cycle de 4 éléments  $\sigma_i$  ( $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ) de  $\Sigma_1$  autour d'un branchement d'ordre 4, tels que  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  appartiennent à la même géodésique distinguée de  $\mathcal{E}$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ , alors on a la relation  $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3$ . Une telle paramétrisation existe bien puisque par hypothèse, il n'existe pas de cycles de branchements d'ordre 4 dans  $\mathcal{E}$ .
- Tout élément de  $\Sigma_1$  est l'intersection d'un unique élément de  $\mathcal{P}$  et un unique élément de  $\mathcal{Q}$ . Il existe une indexation des géodésiques de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$  par un ensemble  $I \amalg J$ , où  $I$  et  $J$  sont des parties de  $\mathbf{Z}$ , telle que pour tout  $i \in I, j \in J, \alpha \in A$ , si  $\mathfrak{a}_i \in \mathcal{P}, \mathfrak{b}_j \in \mathcal{Q}$  et  $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}_j = \sigma_\alpha \in \Sigma_1$ , alors  $i + j = \alpha$ . Cela définit une partie  $S$  de  $\mathbf{Z}^2$  telle que la correspondance qui à  $(i, j) \in S$  associe  $\alpha \in A$  tel que  $i + j = \alpha$  est bijective. On l'obtient de la façon suivante : on fixe un élément  $\sigma_{\alpha_0} \in \Sigma_1$  et on pose  $\alpha_0 = i_0 + j_0, i_0 \in \mathbf{Z}, j_0 \in \mathbf{Z}$ ; on note  $\mathfrak{a}_{i_0}$  la géodésique de  $\mathcal{P}$  contenant  $\sigma_{\alpha_0}$  et  $\mathfrak{b}_{j_0}$  la géodésique de  $\mathcal{Q}$  contenant  $\sigma_{\alpha_0}$ . Cela détermine les indices de toutes les géodésiques distinguées; en effet, si  $c$  est une géodésique de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ , il existe un chemin fini de géodésiques distinguées  $c_0, \dots, c_n$  tel que  $c_0 = c$  et  $c_n = \mathfrak{a}_{i_0}$ , vérifiant  $c_k \cap c_{k+1} \neq \emptyset$ . Cela permet de définir un indice pour  $c$  en utilisant la relation  $i + j = \alpha$  si et seulement si  $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}_j = \sigma_\alpha$ . On montre ensuite que l'indexation de  $c$  ne dépend pas du chemin choisi compte tenu de la relation  $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3$  pour un cycle d'ordre 4 de branchements simples.

Soit  $(H, K)$  un ruban tel que  $\mathcal{E}_H = \mathfrak{a} \in \mathcal{P}$ . Si l'on suppose que la structure riemannienne induite par la métrique coïncide avec celle donnée par  $d\mathbf{x}^2$ , et que la norme du champ de Killing est donnée par  $f$  dans la coordonnée transverse, alors la métrique sur  $H$  s'écrit  $g = 2\epsilon dx dy + f(x) dy^2$ , avec  $\epsilon = \pm 1$  et  $K = \partial_y$ . Sur un ruban  $(V, K)$  correspondant à un élément  $\mathfrak{b} \in \mathcal{Q}$  tel que  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \sigma_\alpha \in \Sigma_1$ , on a  $g = -2\epsilon dx' dy' + f(x') dy'^2$ , avec  $K = \partial_{y'}$ . Appelons  $C_\alpha^H$  (resp.  $C_\alpha^V$ ) le carré ouvert de  $H$  (resp. de  $V$ ) tel que  $\mathcal{E}_{C_\alpha^H} = \mathcal{E}_{C_\alpha^V} = \sigma_\alpha$ ; les deux carrés se recollent via le changement de cartes  $x' = x, y' = y - \epsilon G_\alpha(x)$ , où  $G_\alpha$  est une primitive de  $-1/f_\alpha$  sur l'intervalle  $\mathbf{x}(\sigma_\alpha)$ .

Pour tout  $\alpha \in A$ ,  $\sigma_\alpha = \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}_j$  pour un unique couple  $(i, j) \in S$ . Pour chaque  $\alpha \in A$ , on choisit une primitive  $G_\alpha$  de  $-1/f_\alpha$ . Soit  $(X_0, K)$  la surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$  définie comme quotient de la surface  $(\amalg H_i) \amalg_{(i,j) \in S} (\amalg V_j)$ , où  $(H_i, K)$  est le ruban  $\mathbf{x}(\mathfrak{a}_i) \times \mathbf{R}$  muni de la métrique  $2\epsilon dx dy + f_i(x) dy^2$  avec  $K = \partial_y$ , et  $(V_j, K)$  le ruban  $\mathbf{x}(\mathfrak{b}_j) \times \mathbf{R}$  muni de la métrique  $-2\epsilon dx dy + f_j(x) dy^2$  avec  $K = \partial_y$ , par



la relation d'équivalence  $\sim$  définie par

$$p \sim q \text{ si } p = q \text{ ou } (p, q) \in C_\alpha^{H_i} \times C_\alpha^{V_j}, (i, j) \in S, \alpha = i + j \in A \text{ et } q = \phi_\alpha(p),$$

où  $\phi_\alpha$  est la réflexion de  $C_\alpha^{H_i}$  définie par  $G_\alpha$ .

La surface obtenue est l'espace total d'un fibré en droites sur  $\mathcal{E}$ . Il est clair qu'elle est connexe, par connexité de  $\mathcal{E}$ ; elle est de plus séparée compte tenu du Lemme 2.2.2 et de la Proposition 5 [15].

Si  $\mathcal{E}$  est simplement connexe, alors  $X_0$  est une surface à base dénombrable et acyclique ([15, Proposition 3]). Or les seules surfaces simplement connexes et sans bord sont la sphère  $S^2$  et le plan  $\mathbf{R}^2$  (cela fait partie des théorèmes classiques de la théorie des surfaces; voir par exemple [13, Théorème 3.2.2]); finalement  $X_0$  est homéomorphe au plan  $\mathbf{R}^2$ . De plus,  $X_0$  ne contient pas de zéro du champ, et le choix de  $\epsilon$  dans la définition de la métrique détermine un choix de  $K$  ou  $-K$ . Si  $\mathcal{E}$  contient des branchements d'ordre 4, la surface au dessus d'un tel branchement est une quasi-selle. Soit  $(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, G_{\alpha_3}, G_{\alpha_4})$  les primitives fixées autour d'un tel branchement; on peut toujours modifier  $G_4$  de sorte à pouvoir ajouter un point selle (cf. [3, Proposition 2.32], et les commentaires après la Proposition 1.2.3); comme il n'y a pas de cycles de branchements d'ordre 4 dans  $\mathcal{E}$ , on peut faire ça pour branchement d'ordre 4, de façon cohérente. Il est facile de voir que la surface ainsi obtenue est simplement connexe.

Enfin,  $f$  inextensible entraîne que la surface est maximale; si  $f$  n'est pas extensible, la topologie  $\mathfrak{T}$  sur l'espace des feuilles entraîne que la surface obtenue vérifie tout de même une propriété faible de maximalité: toute demi-bande est contenue dans une bande de type Reeb.  $\square$

**Remarque 2.2.4.** Soit  $(E_f^u, K^u)$  une surface universelle. Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux assignations sur l'espace des feuilles  $\mathcal{E}_{E_f^u}$ , alors il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\mathcal{E}_{E_f^u}$  tel que  $\mathcal{A}' = h \circ \mathcal{A} \circ h^{-1}$  et qui préserve la coordonnée transverse ainsi que la norme du champ. On retrouve alors le fait que la classe d'isométrie de  $E_f^u$  est déterminée par  $f$ .

**Remarque 2.2.5 (Surfaces maximales et fibrés principaux).** On voit dans la preuve de la Proposition 2.2.3 qu'à toute surface lorentzienne  $(X, K)$  maximale et simplement connexe admettant un champ de Killing  $K$  non trivial, on peut associer un certain fibré principal de fibre  $\mathbf{R}$  sur l'espace des feuilles  $\mathcal{E}_X$ . Inversement, la donnée d'une variété  $\mathcal{E}$  de dimension 1 à base dénombrable, étalée dans  $\mathbf{R}$ , et de topologie  $\mathfrak{T}$ , et d'un fibré principal  $\mathcal{F} = (F, p, \mathcal{E})$  de fibre  $\mathbf{R}$  et de base  $\mathcal{E}$ , permet de définir exactement deux métriques lorentziennes  $\pm g$  sur le plan admettant un champ de Killing, telles que le fibré principal associé à ces métriques coïncide avec  $\mathcal{F}$ .

## 2.3 Complétude géodésique

Nous regardons ici les surfaces simplement connexes admettant un champ de Killing; nous les supposons L-complètes. Nous donnons d'abord une classe de surfaces dans laquelle cette seule hypothèse de L-complétude suffit à la complétude de toutes les géodésiques, nous regarderons ensuite une autre classe dans laquelle on trouvera un critère simple de complétude. Nous terminerons en construisant des exemples de variétés maximales et incomplètes.



### 2.3.1 Complétude des géodésiques restant dans une bande

Une géodésique maximale  $\gamma$  peut avoir deux comportements différents : soit elle sort de tout ruban maximal contenu dans  $X$ , soit elle reste dans un ruban maximal à partir d'un certain temps. On note  $t_\infty^+ \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  la borne à droite du domaine de définition de  $\gamma$ . Dans le second cas, nous considérons à nouveau deux comportements : quitte à inverser l'orientation de  $\gamma$  et translater le paramètre géodésique, on peut supposer que  $\gamma(t)$  est définie et appartient au ruban pour  $t \in [0, t_\infty^+]$ . Posons  $I^+ := \{x(\gamma(t)), t \in [0, t_\infty^+]\}$ ; soit  $I$  est borné, auquel cas la géodésique reste dans une bande pour  $t \geq 0$ , soit  $I$  n'est pas borné.

Notons  $T$  la vitesse unitaire de  $\gamma$ , et  $N$  le champ unitaire orthogonal à  $T$ , telle que la base  $(T, N)$  est directe. Écrivons

$$K = CT + \beta N.$$

Alors  $C = \epsilon \langle T, K \rangle$  est une constante appelée constante de Clairaut (voir [2, p. 3]), et  $\beta = -\epsilon \langle K, N \rangle$  est une solution de l'équation de Jacobi. Notons que si  $K(p), p \in \gamma$ , n'est pas dégénéré,  $\beta(p) = 0$  si et seulement si  $\gamma$  est tangent à  $K$  en  $p$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\gamma$  une géodésique de type temps ou espace qui reste dans une bande lorsque  $t$  tend vers  $t_\infty^+$ . Alors :*

- *Soit  $\gamma$  est préservée par une action du flot de  $K$  ; en particulier,  $\gamma$  est entièrement contenue dans la bande.*
- *Soit elle est asymptote à une feuille de  $K$  ; si  $\gamma$  n'est pas orthogonale à  $K$ , cette feuille est de type temps ou espace, selon le type de  $\gamma$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\gamma$  est tangente à  $K$  au moins deux fois à l'intérieur de la bande, alors  $\gamma$  est invariante par l'action  $\phi^\tau$  du flot de  $K$ , pour un certain  $\tau \in \mathbf{R}$ , on l'appelle "géodésique périodique" (voir Lemme 3.3.8 pour une preuve) ; en particulier,  $\gamma$  est complète.

Supposons maintenant que  $\gamma$  est tangente à  $K$  au plus une fois ; quitte à avancer le long de  $\gamma$ , on peut supposer que la géodésique est transverse à  $K$  dans la bande. Dans les coordonnées  $(x, y)$ , cela revient à dire que le dérivé  $x'$  ne s'annule pas sur  $\gamma$  ; la coordonnée  $x$  est donc strictement monotone et converge, puisqu'elle est bornée, vers une constante  $x_0$ . De plus, la coordonnée  $y$  est strictement monotone sur  $\gamma$ . Si  $y$  converge vers  $y_0$  sur  $\gamma$ , il est facile de voir que la géodésique peut être étendue au-delà du point  $p = (x_0, y_0)$ . En effet, comme dans la preuve du Lemme 8 p.130, [24], prenons un voisinage convexe  $\mathcal{V}$  de  $p$  (un ensemble ouvert est dit convexe si et seulement si c'est un voisinage normal de chacun de ses points). La géodésique est contenue dans  $\mathcal{V}$  pour  $t \geq a$ , pour un certain  $a > 0$  ; posons  $q = \gamma(a)$ . En particulier, il existe un unique segment géodésique  $\alpha : [0, 1] \rightarrow T$  joignant  $p$  et  $q$ , et entièrement contenu dans  $\mathcal{V}$ . Cette géodésique coïncide avec  $\gamma$  et la prolonge au-delà de  $p$ .

Il s'ensuit que la coordonnée  $y$  va à l'infini sur  $\gamma$  lorsque la géodésique s'approche de la feuille de  $K$  correspondant à  $x_0$ . Maintenant, on veut prouver que  $x'$  tend vers 0. On distingue deux cas :

- **Case où  $C \neq 0$  :** Nous utilisons le fait suivant :

**Fait 2.3.2.** *Si la feuille de  $K$  correspondant à  $x_0$  n'est pas une orbite de lumière de  $K$ , c'est-à-dire  $f(x_0) \neq 0$ , alors  $x'$  tend vers 0 sur  $\gamma$ ; en particulier,  $C^2 = \epsilon f(x_0)$ .*

En effet, supposons que  $f(x_0) \neq 0$ ; il apparaît dans les équations (2.9) et (2.11) ci-dessous que  $x'(t)$  et  $y'(t)$  convergent lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  sur  $\gamma$ , avec une limite finie. Considérons maintenant  $x$  comme une fonction de  $y$  et écrivons  $\frac{dx}{dy} = \frac{x'(t)}{y'(t)}$ ; cette dérivée converge sur  $\gamma$ ; notons  $l \in \bar{\mathbf{R}}$  sa limite. Remarquons tout de suite que cette limite ne peut être infinie; en effet,  $x$  vue comme une fonction de  $y$  est strictement monotone et tend vers une limite finie tandis que  $y$  va à l'infini; donc si  $\frac{dx}{dy}$  converge, cette limite est nécessairement nulle. Il s'ensuit que  $x'(t)$  tend vers zéro, ce qui montre, compte tenu de l'équation (2.11), que la feuille de  $K$  correspondant à  $x_0$  a le type de  $\gamma$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\gamma$  est de type espace. On montrera que  $f(x_0) \neq 0$ , ce qui permettra de conclure en utilisant le fait précédent. Quitte à changer  $K$  en  $-K$  dans la carte locale, on peut supposer que  $x' > 0$  sur  $\gamma$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $f(x_0) = 0$ ; appelons  $\gamma_\infty$  l'orbite de lumière de  $K$  correspondante. Dans la bande contenant  $\gamma$  et délimitée par  $\gamma_\infty$  et son image  $\tilde{\gamma}_\infty$  par une réflexion générique, l'espace des feuilles de  $K$  est un branchement simple (donc un espace non séparé), dans lequel les points branchés correspondent à ces deux orbites de lumière de  $K$ . Dire que  $x$  tend vers  $x_0$  sur  $\gamma$ , avec  $f(x_0) = 0$ , signifie que  $\gamma$  se rapproche de l'un des deux points de branchement, i.e. soit  $\gamma_\infty$  soit  $\tilde{\gamma}_\infty$ . Avant de poursuivre la preuve, faisons une petite observation :

**Observation :** La bande contenant  $\gamma$  est contenue dans deux rubans maximaux; appelons  $R_h$  le ruban maximal contenant  $\gamma_\infty$  et  $R_v$  celui contenant  $\tilde{\gamma}_\infty$ . Notons  $(x, y)$  les coordonnées sur  $R_h$ , et  $(u, v)$  les coordonnées sur  $R_v$  telles que  $K = \partial_v, L' = \partial_u$ , et  $\langle \partial_u, \partial_v \rangle = -1$ . Soit  $p$  un point dans  $\bar{R}_h \cap \bar{R}_v$ ; nous avons deux cas :

1)  $\langle K(p), K(p) \rangle = 0$  : dans ce cas, il existe un unique  $T \in T_p(T)$  tel que  $\langle K(p), T \rangle = C$  et  $\langle T, T \rangle = 1$ , pour  $C \neq 0$ , et ce vecteur est défini par  $T = (C, \frac{1}{2C})$  si l'orbite de lumière de  $K$  contenant  $p$  est dans  $R_h$ , et par  $T = (-C, \frac{1}{2C})$  dans les coordonnées  $(u, v)$ , si l'orbite est dans  $R_v$ .

2)  $\langle K(p), K(p) \rangle \neq 0$  : il existe deux vecteurs  $T_1, T_2 \in T_p(T)$  tels que  $\langle K(p), T \rangle = C$  et  $\langle T, T \rangle = 1$ ; dans les coordonnées  $(x, y)$ , ils sont donnés par

$$T_1 = \left( \sqrt{C^2 - f(p)}, \frac{C - \sqrt{C^2 - f(p)}}{f(p)} \right), \quad (2.4)$$

$$T_2 = \left( -\sqrt{C^2 - f(p)}, \frac{C + \sqrt{C^2 - f(p)}}{f(p)} \right), \quad (2.5)$$

et on a

$C$	$f(p)$	$x'_1$	$y'_1$	$x'_2$	$y'_2$
+	+	+	+	-	+
+	-	+	+	-	-
-	+	+	-	-	-
-	-	+	+	-	-

où  $(x'_i, y'_i)$  sont les coordonnées de  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Nous distinguons deux comportements distincts de  $\gamma$  en fonction du signe de  $C$ . D'abord, supposons que  $C > 0$ ; dans ce cas,  $x'(t), y'(t) > 0$ . Soit  $q$  un point sur  $\gamma_\infty$ , et notons  $\alpha$  la géodésique dans  $R_h$  tangente à  $T \in T_q(T)$ , telle que  $\langle T, K(q) \rangle = C$  et  $\langle T, T \rangle = 1$ ; il découle de la première partie de l'observation ci-dessus que les deux coordonnées de  $\alpha'(s)$  en  $q$  sont positives et restent donc positives tout au long de la géodésique. Maintenant, prenons  $\tau \in \mathbf{R}$  tel que pour  $t \geq \tau$ ,  $\gamma$  est transverse à  $K$ ; notons  $x_\tau$  la coordonnée de l'orbite de  $K$  coupant  $\gamma$  en  $\gamma(\tau)$ . A partir de  $C^2 = \beta^2 + f$ , on obtient  $C^2 \geq \sup_{t \geq \tau} f(\gamma(t))$ , d'où  $C^2 > \sup_{[x_\tau, x_0]} f(x)$ . Il s'ensuit que  $\alpha$ , dont la constante de Clairaut est également  $C$ , est définie et transverse à  $K$  sur le segment  $[x_\tau, x_0]$ . Donc quitte à déplacer  $q$  sur  $\gamma_\infty$  par le flot de  $K$ , on peut supposer que  $\gamma$  et  $\alpha$  se coupent en un point  $p$  de l'orbite de  $K$  ayant pour coordonnée  $x_\tau$ . En ce point, nous avons  $\langle \gamma'(p), K(p) \rangle = \langle \alpha'(p), K(p) \rangle = C$ , et les coordonnées de  $\alpha'(p)$  sont toutes les deux positives. En utilisant maintenant l'observation ci-dessus, on voit que lorsque  $C > 0$ , un seul des deux vecteurs satisfaisant  $\langle T, K \rangle = C$  et  $\langle T, T \rangle = 1$  a la propriété supplémentaire que ses deux coordonnées sont positives. Cela force l'égalité  $\alpha'(p) = \gamma'(p)$ , donc  $\gamma$  s'étend au-delà de la bande en coupant  $\gamma_\infty$  transversalement. Bien sûr, cela contredit notre hypothèse et prouve qu'en réalité  $f(x_0) > 0$ . Maintenant, pour traiter le cas  $C < 0$ , écrivons  $\gamma'(t) = (u'(t), v'(t))$  dans les coordonnées  $(u, v)$ , avec

$$u' = x', \quad (2.6)$$

$$v' = \frac{1}{f(x)}(f(x)y' + 2x'). \quad (2.7)$$

Écrivons  $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = y'(2x' + fy') = 1$ . Lorsque  $f < 0$  (resp.  $f > 0$ ), on  $x' > 0$  et  $y' > 0$  (resp.  $y' < 0$ ), d'où  $2x' + fy' > 0$  (resp.  $2x' + fy' < 0$ ). Cela donne  $u' > 0$  et  $v' < 0$  dans les deux cas. Soit  $\tilde{q}$  un point sur  $\tilde{\gamma}_\infty$ , et  $\tilde{\alpha}$  la géodésique dans  $R_v$  tangente à  $\tilde{T} \in T_{\tilde{q}}(T)$ , tel que  $\langle \tilde{T}, K(\tilde{q}) \rangle = C$  et  $\langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = 1$ . En répétant l'argument précédent, on montre que  $\gamma$  peut être étendue au-delà de la bande à l'aide de  $\tilde{\alpha}$ , ce qui conduit à une contradiction et termine la première partie de la preuve.

• **Cas où  $C = 0$  :**

Dans ce cas, l'équation (2.11) ci-dessous donne  $x'(t)^2 = -\epsilon f(x)$ . Cela donne  $f(x_0) = 0$  en utilisant à nouveau le fait précédent, d'où  $x' \rightarrow 0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $\gamma$  une géodésique de type temps ou espace qui reste dans une bande lorsque  $t$  tend vers  $t_\infty^+$ , alors  $\gamma$  est complète.*

*Démonstration.* D'après le lemme qui précède, la géodésique approche asymptotiquement une feuille de  $K$ . Écrivons  $2dx dy + f(x)dy^2$  ( $x \in I$ ) pour la métrique en coordonnées adaptées. Les équations  $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \epsilon$  et  $\langle \gamma'(t), K \rangle = \epsilon C$  dans les coordonnées  $(x, y)$  donnent :

$$2x'(t)y'(t) + f(x)y'(t)^2 = \epsilon \quad (2.8)$$

$$x'(t) + f(x)y'(t) = \epsilon C \quad (2.9)$$

On obtient

$$f(x)y'(t)^2 - 2\epsilon C y'(t) + \epsilon = 0, \quad (2.10)$$

et

$$x'(t)^2 = C^2 - \epsilon f(x). \quad (2.11)$$

Cela donne

$$t(x_0) - t(x) = \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}}.$$

Supposons que  $C = 0$ ; dans ce cas,  $x_0$  ne peut être un zéro simple de  $f$ , car dans ce cas, l'orbite de lumière correspondante de  $K$  s'étend dans  $X$  en ajoutant un point selle, et  $\gamma$  quitte la bande en traversant ce point. Par conséquent, la fonction à intégrer est équivalente à  $1/x^\alpha$  au voisinage de  $x_0$ , avec  $\alpha \geq 1$ , donc l'intégrale ci-dessus diverge. Maintenant, si  $C \neq 0$ ,  $\gamma$  s'approche d'une feuille de  $K$  de type temps ou espace de sorte que  $f(x)$  reste loin de 0 au voisinage de cette feuille; il découle de (2.10) que  $y'(t)$  est borné. Puisque  $y$  va à l'infini sur  $\gamma$ , cette dernière est nécessairement complète.  $\square$

### 2.3.2 Constante de Clairaut critique associée à un ruban

L'étude de la complétude se réduit maintenant aux géodésiques de type temps ou espace qui a) soit restent dans un ruban maximal à partir d'un certain temps en traversant tout le ruban (c'est-à-dire  $I^+$  est un intervalle non borné), b) soit sortent de tout ruban maximal.

**Lemme 2.3.4.** *Soit  $\gamma$  une géodésique de type temps ou espace qui n'est pas orthogonale à  $K$ . Supposons que  $\gamma$  coupe une orbite de lumière de  $K$ , notée  $\mathfrak{l}$ . Alors*

- (i)  $\gamma$  ne traverse pas une bande de type II contenant  $\mathfrak{l}$ ;
- (ii) si  $\gamma$  est partout transverse à  $K$ , alors  $\gamma$  est contenue dans le ruban maximal contenant  $\mathfrak{l}$ ;
- (iii) si  $\gamma$  est tangente à  $K$  dans la bande contenant  $\mathfrak{l}$ , alors  $\gamma$  sort du ruban maximal contenant  $\mathfrak{l}$ .

*Démonstration.* (i) Par définition, le feuilletage orthogonal à  $K$  dans une bande de type II est une composante de Reeb; par conséquent, une géodésique qui traverse une bande de type II est tangente à une feuille du feuilletage orthogonal  $\mathcal{K}^\perp$ , et coïncide avec elle puisque les feuilles de  $\mathcal{K}^\perp$  sont des géodésiques.

(ii) Le feuilletage de  $K$  dans une bande de type III est une composante de Reeb; ainsi, si  $\gamma$  traverse une bande de type III contenant  $\mathfrak{l}$ ,  $\beta$  s'annule dans cette bande. En combinant cela avec (i), on obtient (ii).

(iii) Appelons  $p$  le point où  $\beta$  s'annule. La réflexion générique qui fixe la géodésique orthogonale à  $K$  passant par  $p$  est une isométrie locale préservant  $\gamma$ , et qui envoie  $\mathfrak{l}$  sur l'autre orbite de lumière de la bande de type III contenant  $\mathfrak{l}$ . Par conséquent,  $\gamma$  quitte le ruban en traversant cette feuille.  $\square$

Dans la suite, quitte à prendre  $-K$  au lieu de  $K$  dans une carte adaptée, on supposera toujours que  $x' > 0$  le long d'une géodésique  $\gamma$ .

**Corollaire 2.3.5.** 1) Si  $\gamma_\epsilon$  reste dans un ruban maximal  $R_f$  avec un intervalle  $I^+$  infini, alors

- soit  $C^2 > \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x)$ ,
- soit  $C^2 = \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x)$  et  $m := \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x)$  n'est pas une valeur critique de  $f$  sur  $I^+$ .

2) Si  $\gamma_\epsilon$  coupe une feuille de lumière de  $K$ , notée  $\mathfrak{l}$ , d'abscisse  $x_0$  et appartenant à un ruban maximal  $R_f$ , et si  $C^2 > \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$ , alors  $\gamma$  reste dans  $R_f$  avec un intervalle  $I^+$  infini.

Avant de démontrer le corollaire, remarquons que 2) n'est qu'une réciproque partielle de 1); au fait, l'autre partie de la réciproque que l'on imagine est aussi vraie, nous la notons dans la remarque qui suit, mais nous n'avons pas à ce stade les moyens de la démontrer. Elle découlera du Corollaire 3.3.7 du Chapitre 2.

**Remarque 2.3.6.** Si  $\gamma_\epsilon$  coupe une feuille de lumière de  $K$  appartenant à un ruban maximal  $R_f$ , d'abscisse  $x_0$ , et si  $C^2 = \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$  et  $m := \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$  n'est pas une valeur critique de  $f$  pour  $x \geq x_0$ , alors  $I^+$  est un intervalle infini.

### Preuve du Corollaire 2.3.5

*Démonstration.* 1) L'assertion (iii) du Lemme 2.3.4 entraîne que si  $\gamma$  reste dans un ruban maximal  $R_f$  à partir d'un certain temps, alors  $C^2 > \epsilon f(x)$ , pour tout  $x \in I^+$ . D'où  $C^2 \geq \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x)$ .

Maintenant, si  $m := \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x) < \infty$  est une valeur critique de  $f$  sur  $I^+$  (ce qui équivaut à dire que  $m$  est atteint par  $\epsilon f$  en un point intérieur à  $I^+$ ), on affirme qu'une géodésique  $\gamma_C$  avec  $C^2 = m$  ne peut couper cette orbite critique transversalement, car en supposant que c'est le cas et en appliquant la formule  $C^2 - \beta^2 = \epsilon f$  à un point de cette orbite, on obtient  $m - \beta_0^2 = m$ , avec  $\beta_0^2 > 0$ , ce qui est absurde. La géodésique ne traverse donc pas tout le ruban. On en déduit que si  $I^+$  est infini et  $C^2 = \sup_{x \in I^+} \epsilon f(x)$ , alors  $m$  n'est pas une valeur critique de  $f$  sur  $I^+$ .

2) L'hypothèse  $C^2 > \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$  entraîne par (ii), Lemme 2.3.4, que  $\gamma$  est contenue dans le ruban maximal contenant  $\mathfrak{l}$ , à partir d'un certain temps. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\gamma$  ne traverse pas tout le ruban; le Lemme 2.3.1 implique que  $\gamma$  est asymptote à une feuille de  $K$ , où la norme du champ vaut  $C^2$ ; contradiction.  $\square$

Le lemme qui suit caractérise les géodésiques complètes contenues dans un ruban maximal à partir d'un certain temps. Avant de l'énoncer, remarquons que si une géodésique de type temps (resp. espace) reste dans un ruban  $R_f$  avec un intervalle  $I^+ = x(\gamma(t)_{t \geq 0})$  infini, alors forcément  $f$  est bornée inférieurement sur  $\mathbf{R}^+$  (resp. supérieurement), car si non toute géodésique du ruban finirait par en sortir compte tenu du Corollaire 2.3.5, 1).

**Lemme 2.3.7 (Complétude dans un ruban).** Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe admettant un champ de Killing  $K$  non trivial, et  $L$ -complète. Soit  $\epsilon = \pm 1$ , et soit  $R_f$  un ruban maximal tel que  $-\epsilon f$  est bornée inférieurement sur  $\mathbf{R}^+$  et n'est pas bornée supérieurement. Alors les géodésiques de type  $\epsilon$  contenues dans  $R_f$  à partir d'un certain temps, et traversant tout le ruban sont complètes si et seulement si

- il existe  $M > 0$  tel que  $\mu(\{-\epsilon f \leq M\} \cap \mathbf{R}^+) = \infty$  ( $\mu$  est la mesure de Lebesgue).  
ou
- si pour tout  $M > 0$ ,  $\mu(\{-\epsilon f \leq M\} \cap \mathbf{R}^+) < +\infty$ , et

$$\exists \alpha > 0, \int_{\{-\epsilon f \geq \alpha\} \cap \mathbf{R}^+} \frac{dx}{\sqrt{-\epsilon f(x)}} = \infty. \quad (2.12)$$

En particulier, si  $f$  est bornée, ces géodésiques sont complètes.

*Démonstration.* Commençons par une observation :

**Observation :** si une géodésique  $\gamma_{C_0}$  qui reste dans le ruban est complète, alors toute géodésique  $\gamma_C$  du ruban telle que  $|C| \leq |C_0|$  est complète aussi. Cela découle du fait que le temps de passage dans le ruban est une fonction décroissante de  $C$ .

Soit maintenant  $\gamma_\epsilon$  une géodésique contenue dans  $R_f$  pour  $x \geq x_0$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$  et traversant tout le ruban. Elle est complète si et seulement si l'intégrale  $t_\infty^+ = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}}$ , où  $C$  est la constante de Clairaut de  $\gamma$ , diverge. La première partie du lemme découle de l'inégalité suivante

$$\int_{\{-\epsilon f \leq M\} \cap \{x \geq x_0\}} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} \geq \frac{\mu(\{-\epsilon f \leq M\} \cap \{x \geq x_0\})}{\sqrt{C^2 + M}}.$$

Supposons maintenant que pour tout  $M > 0$ ,  $\mu(\{-\epsilon f \leq M\} \cap \mathbf{R}^+) < +\infty$ . (\*)

Étant donné que  $\gamma$  est contenu dans  $R_f$  pour  $x \geq x_0$ , on a d'après le Corollaire 2.3.5  $C^2 \geq \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$ . Supposons d'abord que  $C^2 > \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$ , alors  $C^2 \geq \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x) + \eta$ , avec  $\eta > 0$ , et l'inégalité

$$\int_{\{-\epsilon f \leq C^2\} \cap \{x \geq x_0\}} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} \leq \frac{\mu(\{-\epsilon f \leq C^2\} \cap \{x \geq x_0\})}{\sqrt{\eta}}$$

entraîne que l'intégrale à gauche est convergente. Par conséquent,  $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}}$  diverge si et seulement si  $\int_{\{-\epsilon f \geq C^2\} \cap \{x \geq x_0\}} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}}$  diverge. Or

$$\int_{\{-\epsilon f \geq C^2\} \cap \mathbf{R}^+} \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{-\epsilon f(x)}} \leq \int_{\{-\epsilon f \geq C^2\} \cap \mathbf{R}^+} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} \leq \int_{\{-\epsilon f \geq C^2\} \cap \mathbf{R}^+} \frac{dx}{\sqrt{-\epsilon f(x)}}.$$

Ces inégalités montrent que  $\gamma$  est complète si et seulement si  $\int_{\{-\epsilon f \geq C^2\} \cap \mathbf{R}^+} \frac{dx}{\sqrt{-\epsilon f(x)}} = \infty$ , ce qui est équivalent à la condition du lemme lorsque (\*) est vérifiée.

Finalement, si pour tout  $M > 0$ ,  $\mu(\{-\epsilon f \leq M\} \cap \mathbf{R}^+) < +\infty$ , et si la condition (2.12) est vérifiée, alors les géodésiques telles que  $C^2 > \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$  sont complètes, et leur

complétude entraîne alors celle des géodésiques telles que  $C^2 = \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$ , compte tenu de l'observation qui précède. D'où la complétude de toutes les géodésiques qui restent dans le ruban. Supposons maintenant que la condition (2.12) n'est pas satisfaite ; pour tout  $C^2 > \sup_{x \geq x_0} \epsilon f(x)$ , il existe une géodésique  $\gamma$  qui traverse le ruban avec un intervalle  $I^+$  non borné, et dont la constante de Clairaut est  $C$  (cf. Corollaire 2.3.5, 2), et on a montré qu'une telle géodésique est alors incomplète. Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Definition 2.3.8 (Constante de Clairaut critique).** *D'après l'observation dans la preuve précédente, on peut définir pour un ruban  $R_f$*

$$C^+ := \sup\{|C| \geq \sup_{x \geq x_0} \epsilon f, \gamma_C \text{ de type } \epsilon \text{ est complète}\},$$

$$\text{et } C^- := \inf\{|C| \geq \sup_{x \geq x_0} \epsilon f, \gamma_C \text{ de type } \epsilon \text{ est incomplète}\}.$$

On a évidemment  $C^+ = C^-$  ; on note  $C^*$  cette quantité.

**Remarque 2.3.9.** *Il apparait alors de la preuve qui précède que soit  $C^* = +\infty$ , auquel cas toutes les géodésiques contenues dans le ruban à partir d'un certain temps sont complètes, soit  $C^* = \sup \epsilon f$ . Dit autrement, l'incomplétude géodésique parmi celles qui restent dans le ruban  $R_f$  entraîne  $C^* = \sup \epsilon f$ . En particulier, si le ruban est une bande infinie, alors  $C^* = 0$ .*

**Corollaire 2.3.10 (Complétude d'une selle L-complète).** *Soit  $(S, K)$  une selle L-complète définie par la donnée d'un branchement d'ordre 4, et de 4 fonctions  $f_i, i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ , sur les intervalles  $(\sigma_i)_{i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}}$  de  $\Sigma$ , telles que  $f_i$  et  $f_{i+1}$  ont le même germe d'ordre infini au point  $b_i = \bar{\sigma}_i \cap \bar{\sigma}_{i+1}$ . Alors  $S$  est complète si et seulement si pour tout  $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ,*

- *il existe  $M > 0$  tel que  $\mu\{|f_i| \leq M\} = \infty$  ( $\mu$  est la mesure de Lebesgue).*  
*ou*
- *pour tout  $M > 0$ ,  $\mu\{|f_i| \leq M\} < +\infty$ , et*

$$\exists \alpha > 0, \int_{\{|f_i| \geq \alpha\}} \frac{dx}{\sqrt{|f_i(x)|}} = \infty.$$

**Remarque 2.3.11.** *Pour une selle L-complète, il découle de la remarque 2.3.9 que soit la selle est complète, soit  $C^* = 0$ . Si la selle est incomplète et si  $C^* = C^- = 0$  est un minimum, alors les géodésiques orthogonales sont incomplètes (voir Exemple 2.3.21). Si en revanche la selle est incomplète et  $C^* = C^+ = 0$  est un maximum, alors les géodésiques de type temps ou espace, orthogonales au champ, sont complètes et toutes les autres sont incomplètes.*

**Definition 2.3.12 (Petites surfaces).** *Nous appelons « petite surface » toute surface lorentzienne simplement connexe et maximale, admettant un champ de Killing complet, et ayant un nombre fini de bandes.*



Soit  $(X, K)$  une petite surface :  $\mathcal{E}_X$  a un nombre fini de points de branchement. Par conséquent,  $\mathcal{E}_X$  ne contient que des branchements d'ordre 4, en nombre fini qu'on note  $n$ . Comme il ne peut y avoir de cycles de tels branchements dans  $\mathcal{E}_X$ , cela entraîne que l'arbre  $\mathcal{G}(\mathcal{E}_X)$  contient  $2n + 2$  branches infinies. Ces branches infinies correspondent aux bandes infinies dans  $X$ .

**Corollaire 2.3.13 (Complétude d'une surface simplement connexe et L-complète avec un nombre fini de bandes).** *Soit  $(X, K)$  une surface simplement connexe et L-complète, avec un nombre fini  $4n$  de points de branchement. Soit  $(f_i)_{i \in I}$ ,  $I := \mathbf{N}_{\leq 2n+1}$ , les  $2n + 2$  fonctions correspondant aux bandes infinies dans  $X$ . Alors  $X$  est complète si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,*

- *il existe  $M > 0$  tel que  $\mu\{|f_i| \leq M\} = \infty$  ( $\mu$  est la mesure de Lebesgue).*  
ou
- *pour tout  $M > 0$ ,  $\mu\{|f_i| \leq M\} < +\infty$ , et*

$$\exists \alpha > 0, \int_{\{|f_i| \geq \alpha\}} \frac{dx}{\sqrt{|f_i(x)|}} = \infty.$$

### 2.3.3 Résultats généraux de complétude

Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne munie d'un champ de Killing  $K$  non trivial et complet. On rappelle que l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E}_X - B$ , où  $B$  est l'ensemble des points non séparés de  $\mathcal{E}_X$ , est noté  $\Sigma$ .

**Theorem 2.3.14.** *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe avec un champ de Killing  $K$ . On suppose que  $X$  est à courbure bornée. Alors  $X$  est complète si et seulement si elle est L-complète.*

**Corollaire 2.3.15.** *Les surfaces lorentziennes à courbure bornée et dont le groupe d'isométrie est de dimension 1 sont complètes si et seulement si elles sont L-complètes.*

**Corollaire 2.3.16.** *L'extension  $E_f^u$  associée à un tore lorentzien  $(T, K)$  est géodésiquement complète.*

Soit  $(\sigma_i)_{i \in I}$  une suite d'éléments deux à deux distincts de  $\Sigma$ ; une telle suite est dite « normale » si

- les  $\sigma_i$  sont contenus dans des branchements d'ordre 4 de  $\mathcal{E}_X$ ,
- pour tout  $i \in I$ ,  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  appartiennent au même branchement d'ordre 4, et ne sont pas adjacents dans celui-ci; ils sont donc un "en face" de l'autre,
- $(\sigma_i)_{i \in I}$  est maximale.

**Theorem 2.3.17.** *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe avec un champ de Killing  $K$ . On suppose que  $f'$  est bornée. Alors  $X$  est complète si et seulement si elle est L-complète et les géodésiques orthogonales au champ sont complètes. Cette dernière condition s'écrit : pour toute suite normale  $(\sigma_i)_{i \in I}$  de  $\Sigma$ , on a*

$$\sum_i \int_{\sigma_i} \frac{dx}{\sqrt{|f_i(x)|}} = \infty. \quad (2.13)$$



**Preuve du Théorème 2.3.14**

*Démonstration.* Supposons que  $X$  est L-complète et que la courbure est bornée par une constante  $N > 0$ , et montrons que  $X$  est complète. Nous montrons d'abord que les géodésiques qui restent dans un ruban maximal en traversant tout le ruban sont complètes. Fixons un ruban maximal  $R_f$  et une géodésique  $\gamma$  de type  $\epsilon$  traversant tout le ruban. En raison de la L-complétude,  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$ . Posons  $g(x) := C^2 - \epsilon f(x)$ ; l'hypothèse sur la courbure entraîne que  $g''$  est bornée, cela donne pour tout  $x \in I^+$ ,

$$|g(x)| \leq A(1 + x^2), \quad (2.14)$$

où  $A$  est une constante qui dépend de  $N$  et du ruban considéré. Cela entraîne

$$\int_{I^+} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{I^+} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \infty,$$

d'où la complétude de  $\gamma$ .

Supposons maintenant que  $\gamma$  est une géodésique qui quitte tout ruban maximal. Notons  $\Delta_{x_i}$  le morceau de  $\mathcal{E}_X$  délimité par deux zéros consécutifs de  $\beta$ , et où  $\gamma$  se trouve alors dans un ruban maximal  $R_{f_i}$ , et notons  $|\Delta_{x_i}|$  la longueur de ce morceau. En utilisant encore une fois l'hypothèse sur la courbure, on obtient

$$|g(x)| \leq N \cdot |\Delta_{x_i}|^2, \quad \forall x \in \Delta_{x_i}, \quad (2.15)$$

où  $N > 0$  est la constante définie au début de la preuve. Par suite le temps de passage de  $\gamma$  dans chaque morceau est minoré par une constante uniforme  $1/\sqrt{N}$ . Comme  $\gamma$  traverse une infinité de tels morceaux, la complétude en découle.  $\square$

**Preuve du Théorème 2.3.17**

*Démonstration.* Ici on suppose que  $f'$  est bornée par une constante  $N > 0$ . Soit  $\gamma$  une géodésique contenue dans un ruban  $R_f$  à partir d'un certain temps. L'hypothèse sur la dérivée de  $f$  donne

$$|C^2 - \epsilon f(x)| \leq A'(1 + |x|), \quad (2.16)$$

où  $A' > 0$  est une constante qui dépend de  $N$  et du ruban considéré. D'où  $\int_{I^+} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{A'}} \int_{I^+} \frac{dx}{\sqrt{1+|x|}} = \infty$ , ce qui montre que  $\gamma$  est complète.

Supposons maintenant que  $\gamma$  quitte tout ruban maximal. Notons  $\Delta_{x_i}$  le morceau de  $\mathcal{E}_X$  délimité par deux zéros consécutifs de  $\beta$ , et où  $\gamma$  délimite alors un ruban  $R_{f_i}$ , avec  $f_i$  définie sur un intervalle  $J_i$  de longueur  $|\Delta_{x_i}|$ , et  $t_i$  le temps de passage de  $\gamma$  dans un tel morceau. Sur chaque ruban  $R_{f_i}$ , l'hypothèse sur la dérivée de  $f$  donne  $|C^2 - \epsilon f_i(x)| \leq N \cdot |\Delta_{x_i}|$ ; cela entraîne dans chaque ruban

$$t_i = \int_{\Delta_{x_i}} \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} \geq \frac{\sqrt{|\Delta_{x_i}|}}{\sqrt{N}}. \quad (2.17)$$

Supposons que  $\gamma$  est incomplète; l'inégalité (2.17) entraîne que la série  $\sum_i \sqrt{|\Delta_{x_i}|}$  est convergente. Dans la suite, nous montrons que  $\gamma$  est forcément une géodésique orthogonale à  $K$ . Posons  $d := \sum_i t_i < \infty$ . Définissons  $F_i(t) := f_i \circ x(t)$  et  $G_i(t) := C^2 - \epsilon f_i \circ x(t)$ ,  $t \in J_i$ . On a  $|F'_i(t)| = |f'_i(x) \cdot x'(t)| = |f'_i(x)| \sqrt{C^2 - \epsilon f_i(x(t))}$ . Par hypothèse,  $f'$  est bornée ainsi que  $\sum_i \sqrt{|\Delta_{x_i}|}$ , ceci implique que  $F'_i$  est bornée sur chaque  $I_i$  par une constante  $N'$  indépendante de  $i$ . Soit maintenant  $(d_i)_i$  une suite qui tend vers  $d$ , telle que pour tout  $i$ ,  $d_i \in J_i$ . Soit enfin  $(y_i)_i$  une suite de zéros de  $F_i$  qui tend vers  $d$ , telle que pour tout  $i$ ,  $y_i \in J_i$ , et  $(z_i)_i$  une suite de zéros de  $\beta$  (donc de  $G_i$ ) telle que pour tout  $i$ ,  $z_i \in J_i$ . D'une part  $|F_i(d_i) - F_i(y_i)| \leq N'(d_i - y_i)$ , d'autre part  $|G_i(d_i) - G_i(z_i)| \leq N'(d_i - z_i)$ . Comme  $(d_i - y_i)_i$  et  $(d_i - z_i)_i$  tendent vers 0, la suite  $(f_i \circ x(d_i))$  tend alors simultanément vers 0 et vers  $C^2$ , entraînant  $C = 0$ .

Il s'ensuit que  $X$  est complète si et seulement si les géodésiques orthogonales à  $K$  sont complètes. Une telle géodésique qui quitte tout ruban maximal quitte chaque ruban en passant par une selle, de sorte que les morceaux  $\Delta_{x_i}$  qu'elle traverse définissent ce qu'on a appelé dans le Théorème 2.3.17 une « suite normale » d'éléments de  $\Sigma$ , et la complétude se traduit alors par (2.13).  $\square$

### Preuve du Corollaire 2.3.16

*Démonstration.* Ce corollaire est une conséquence immédiate du Théorème 2.3.14 et de la L-complétude de l'extension universelle associée à un tore (cf. Théorème 1.2.1).  $\square$

**Remarque 2.3.18.** *Dans le cadre des extensions universelles, la complétude de certaines géodésiques se déduit plus facilement :*

- 1) *Pour celles qui restent dans un ruban maximal en traversant tout le ruban, la complétude géodésique peut être vue comme une conséquence de la dernière conclusion du Lemme 2.3.7, i.e. du fait que la norme du champ soit bornée.*
- 2) *Si  $\gamma$  est une géodésique qui quitte tout ruban maximal, alors  $\gamma$  est invariante par une translation de  $E_f^u$ ; on l'appelle "géodésique périodique" (voir Lemme 3.3.8 du chapitre suivant pour une preuve). Cela prouve qu'elle est complète.*

## 2.3.4 Exemples et contre-exemples

La L-complétude est équivalente à la complétude des géodésiques "distinguées" de l'espace des feuilles, vu comme une variété riemannienne. Et on a vu que lorsque la norme du champ est bornée, la complétude des géodésiques distinguées de l'espace des feuilles entraîne celle des géodésiques de la surface qui restent dans un ruban à partir d'un certain temps. Remarquons toutefois qu'il n'y a pas de lien entre la complétude géodésique de  $X$  et la complétude de la variété des feuilles  $\mathcal{E}_X$ .

**Exemple 2.3.19.** *Soit  $(X, K)$  une surface lorentzienne simplement connexe et L-complète. On suppose de plus que tous les rubans de  $X$  ont des bandes infinies sur les deux extrémités, i.e. les géodésiques distinguées de  $\mathcal{E}_X$  ont deux branches infinies. Puisque toute géodésique de  $\mathcal{E}_X$  est contenue à partir d'un certain moment dans une branche infinie,*



**Exemple 2.3.23** ( $X$  incomplète,  $\mathcal{E}_X$  complète). On suppose que  $\mathcal{E}_X$  contient un cycle infini de branchements simples, qu'on note  $C_\infty$ , comme sur la figure ci-dessous. On suppose de plus que sur chaque bande de  $C_\infty$ , la norme du champ est définie par

$$f_i(x) = \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \text{ pour } x \in I_i := \left[\frac{1}{(\pi i + \pi)^2}, \frac{1}{(\pi i)^2}\right].$$

La suite des longueurs des bandes est donc donnée par  $(\Delta_{x_i})_i = \left(\frac{1}{(\pi i)^2} - \frac{1}{(\pi i + \pi)^2}\right)_i$ , dont la somme converge. On suppose enfin que la longueur des bandes voisines de l'infini est infinie, et qu'en dehors de ces bandes et de celles de  $C_\infty$ , la longueur des bandes est égale à 1. La variété des feuilles ainsi obtenue est complète.

Soit maintenant  $\gamma$  une géodésique de type espace qui parcourt l'espace des feuilles  $\mathcal{E}_X$  le long du morceau en vert sur la figure ci-dessous. Lorsque  $\gamma$  fait demi-tour dans l'espace des feuilles, cela signifie qu'elle est tangente à une feuille du champ. Voir la figure ci-dessous.

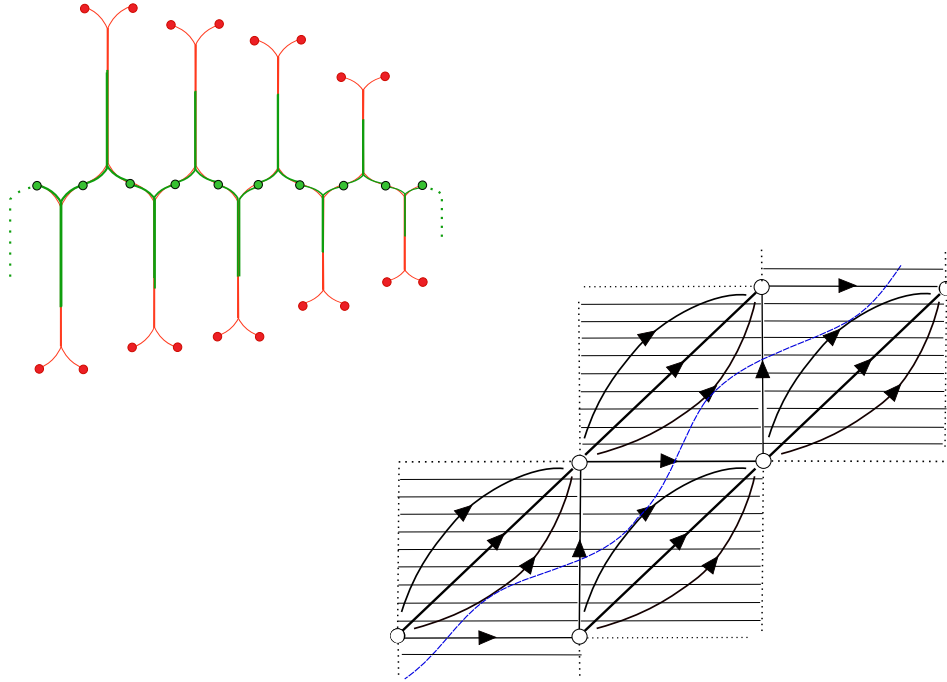


FIGURE 2.10 –  $C_\infty$  : cycle infini de branchements simples de l'espace des feuilles

On affirme que  $\gamma$  est incomplète. En effet, notons  $t_i$  le temps mis pour parcourir chaque bande de  $C_\infty$ , on a  $t_i \leq 2 \int_{x_i}^{y_i} \frac{dx}{\sqrt{g_i(x)}}$ , où  $x_i = \frac{1}{(\pi i + \pi)^2}$ ,  $y_i = \frac{1}{(\pi i)^2}$  et  $g_i(x) = C^2 - f_i(x)$ .

Écrivons maintenant  $|g_i(x)| = |g'_i(a_i)| |x - z_i|$ , avec  $a_i \in ]x_i, y_i[$  et  $g_i(z_i) = 0$ . Cela entraîne pour chaque  $i$ ,

$$\int_{x_i}^{y_i} \frac{dx}{\sqrt{g_i(x)}} \leq \frac{2\sqrt{y_i - x_i}}{\sqrt{g'_i(a_i)}}.$$

Puisque  $g_i$  est minorée uniformément au voisinage des orbites de lumière du champ,  $\gamma$  parcourt ces voisinages en un temps fini; compte tenu de cette remarque, on peut se ramener à une suite  $|g'_i(z_i)|$  qui tend vers l'infini, en isolant les voisinages des zéros de

la norme. Il existe donc une constante  $M > 0$  telle que  $\int_{x_i}^{y_i} \frac{dx}{\sqrt{g_i(x)}} \leq 2M\sqrt{y_i - x_i}$ . Par conséquent, la somme des  $t_i$  est majorée par la série  $\sum_i 4M\sqrt{y_i - x_i}$  qui converge par définition, ce qui montre que  $\gamma$  est incomplète.



# Chapitre 3

## Construction de tores lorentziens sans points conjugués

### 3.1 Description des résultats

Here we give the main statements of the chapter. Proofs will be given in the following sections.

Recall that any compact connected Lorentzian surface is homeomorphic to the torus or the Klein bottle. In this work, we give infinitely many new examples of geometrically non-equivalent Lorentzian tori and Klein bottles without conjugate points.

Given a non-flat torus  $T$  with a non-trivial Killing field  $K$ , the flow of  $K$  induces a free action of the group  $S^1$  on  $T$  (see [3, Theorem 3.25]). The orbits of  $K$  are therefore periodic with the same period. Given the Clifton-Pohl metric, a first attempt to obtain deformations of such a metric without conjugate points can be achieved in three different ways : varying the period of the Killing field; acting by an homothety on the torus; or acting by a "twist" along a (closed) orbit of  $K$ . Although the variations above give non-isometric metrics on the torus without conjugate points, these examples are all locally "the same", having all the same universal cover (up to homothety). Less trivial deformations of the Clifton-Pohl torus without conjugate points are obtained by Mounoud in [22], as metrics projectively equivalent to the Clifton-Pohl torus; this gives a 2-dimensional family of Lorentzian tori without conjugate points, with non-isometric universal cover.

When  $K$  is timelike or spacelike, a result of Gutierrez, Palomo and Romero in [18] shows that if the surface does not have conjugate points, it must be flat. In this paper, we suppose that  $K$  has a null orbit. Let  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  be the universal cover of a non-flat torus  $T$  with Killing field  $K$ . The action of  $K$  on the torus given above allows to define global coordinates  $(u, \theta)$  on the universal cover  $\tilde{T}$  on which  $\tilde{K}$  is given by  $\partial_u$ . In this way, one can define  $\tilde{\kappa}(\theta)$  as the sectional curvature defined on the space of leaves of  $\tilde{K}$  (which is a line). We prove the following

**Theorem 3.1.1.** *Let  $(T, K)$  be a Lorentzian torus with a Killing field, and let  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  be its universal cover. Suppose that*

- (i) the null orbits of  $\tilde{K}$  are geodesically incomplete,
  - (ii) there is only one critical orbit of  $\tilde{K}$  in each band of  $\tilde{T}$ ,
  - (iii) the curvature  $\tilde{\kappa}$  is a monotone function between two consecutive critical orbits of  $\tilde{K}$ ,
  - (iv) the reflections with respect to the critical orbits of  $\tilde{K}$  act on  $\tilde{T}$  by isometry,
  - (v) the foliation orthogonal to  $\tilde{K}$  has only Reeb components.
- Then  $T$  has no conjugate points.

Here, an open band is a connected component of the set  $\{\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle \neq 0\}$  in  $\tilde{T}$ , and a critical orbit of  $\tilde{K}$  is an orbit corresponding to the critical points of the function  $\langle \tilde{K}, \tilde{K} \rangle$  (these orbits are geodesics). Many explicit new (analytic) examples of Lorentzian tori without conjugate points, as well as Klein bottles with the same property, will be deduced from Theorem 3.1.1 in a very simple way.

The assumption (i) implies that the null orbits of  $\tilde{K}$  are isolated and that the norm of  $\tilde{K}$  changes sign when crossing such an orbit transversally (please see [3, Lemma 2.25]). In particular, there exists only finitely many null orbits of  $K$  in  $T$ .

**Remarque 3.1.2.** *Each of these examples can be deformed to families of metrics without conjugate points, in the same way as previously done with the Clifton-Pohl torus (changing the period of the orbits of  $K$ , changing by homothety, twist or by projective deformation).*

The structure of compact Lorentzian surfaces with a one parameter group of isometries is already studied in [3]. Although the property of being without conjugate points doesn't appear to be strong enough to expect a rigidity phenomenon in this subclass of Lorentzian surfaces, Theorem 5.29, [3], gives obstructions for such tori to be without conjugate points. In particular, it follows from this theorem that a Lorentzian torus with a Killing field, without conjugate points, is either flat or non-homotopic to the flat metric. Assuming condition (i) in Theorem 3.1.1 (which is in some sense generic), we give a new obstruction for those tori to be without conjugate points. It is easily seen that a geodesic parametrization of an incomplete null orbit of  $K$  is given by  $e^{\lambda t}$ , where  $K = \partial_t$ , and  $\lambda \neq 0$  depends on the given null orbit. We prove

**Theorem 3.1.3.** *Let  $(T, K)$  be a Lorentzian torus without conjugate points, with Killing vector field  $K$ . Assume that the null orbits of  $K$  are incomplete. If  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are the parameters related to any two consecutive null orbits of  $K$  in the torus, then*

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

As an immediate corollary of this theorem, it appears that these tori are limits of Lorentzian tori admitting a Killing field, and containing conjugate points (see Corollary 3.3.17 in this paper).

**Strategy of the proof of Theorem 3.1.1 :** Let us recall that no null geodesic in a Lorentzian surface has conjugate points (see [24, page 291] for instance), so we restrict our attention to non-null geodesics. Let  $\gamma$  be a geodesic of an  $n$ -dimensional Lorentzian manifold  $M$ . A Jacobi field is a vector field along  $\gamma$  satisfying a differential equation called the Jacobi equation. There are many equivalent definitions of conjugate points; the one



we will be using in this paper is the following : a pair of conjugate points on  $\gamma$  are points such that there exists a non-trivial Jacobi field along  $\gamma$  vanishing at these points. When  $\gamma$  is not lightlike, we can suppose that this vector field is orthogonal to  $\gamma$ ; and when  $M$  is a surface, this reduces to the differential equation in one variable

$$u'' + \epsilon\kappa u = 0, \quad (3.1)$$

where  $\kappa$  is the sectional curvature along  $\gamma$ , and  $\epsilon = \pm 1$  is the sign of  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ .

A Clifton-Pohl torus, denoted by  $T_{CP}$ , is the quotient of the manifold  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$  equipped with the metric

$$g_{CP} = \frac{2dx dy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}, \quad (3.2)$$

by some non trivial homothety. The proof that  $T_{CP}$  has no conjugate points is done using a remarkable property : the universal cover of  $T_{CP}$  is a proper open subset of an extension  $\hat{\Sigma}$ , introduced in [2]. This extension is geodesically complete ; thus, some of the solutions of (3.1) defined over  $\mathbf{R}$  vanish more than one time on  $\tilde{\gamma}$ , the extension of a geodesic  $\gamma$  of  $\tilde{T}_{CP}$  to  $\hat{\Sigma}$ , but there are never two such zeros in the Clifton-Pohl torus. This is obtained through an explicit resolution of the Jacobi equations.

We saw that the possibility of extending the universal cover of a Lorentzian torus to a maximal Lorentzian surface is not specific to the Clifton-Pohl torus. Let  $(T, K)$  be a Lorentzian torus with a non-trivial Killing field  $K$ , and let  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  be its universal cover. There exists a maximal Lorentzian surface  $(E, K_E)$  homeomorphic to  $\mathbf{R}^2$  such that  $(\tilde{T}, \tilde{K})$  is isometrically embedded in  $E$ . In Chapter 2, we proved that

**Theorem 3.1.4.** *The extension  $E$  associated to a Lorentzian torus  $(T, K)$  is geodesically complete.*

This makes these surfaces simple to deal with. When the torus is not flat, this extension always contains conjugate points (see [3, Proposition 5.28]). So one has to prove that there are never two such points in the universal cover of the torus for the family given in Theorem 3.1.1 above. In this paper, the existence of conjugate points is studied from the point of view of the oscillation theory of the Jacobi equation. One of the solutions of (3.1), denoted by  $\beta$  in [2], is given by the normal component of  $K$  on  $\gamma$ .

When condition iv) is added, we develop a rather simple point of view from which one can conclude to the existence or not of conjugate points. In fact, given a non-null geodesic  $\tilde{\gamma}$  of the extension  $E$ , when  $\beta$  vanishes twice on  $\tilde{\gamma}$  (these are the only geodesics that could carry conjugate points in this case), the geodesic is preserved by a translation  $T = 4\omega$  of the geodesic parameter, and the distance between two consecutive zeros of  $\beta$  is constant, equal to  $T/2$ . Furthermore, when the foliation orthogonal to  $K$  contains only Reeb components (this is a necessary condition to the absence of conjugate points; [3, Theorem 5.29]), one proves easily that  $\tilde{\gamma}$  is contained in the torus on an interval of type  $]t_0, t_0 + 2\omega[$ . So it becomes clear that the absence of conjugate points is equivalent to the fact that  $\beta$  realises the minimum distance between two consecutive zeros of the

solutions of the Jacobi equation. This is the point of view we use to prove Theorem 3.1.1 above. The distance between these zeros is studied by use of techniques from differential equation theory, provided in [26],[5] and [7]. The idea used is the fact that there exists a close connection between the oscillation problem of the equation (3.1) and the eigenvalue problem

$$u'' + \lambda \epsilon \kappa u = 0,$$

with suitable boundary conditions. This proof is an example of the interplay between geometry, analysis and the theory of ordinary differential equations in the study of conjugate points.

The chapter is organized as follows : section 2 is a study of the Jacobi equation regardless of geometry ; we establish some lemmas about the distance between the zeros of the solutions of such an equation. These lemmas will be applied in section 3 in the case of Lorentzian tori with a Killing field, in which we characterize Lorentzian tori without conjugate points in the way presented before. The obstruction in Theorem 3.1.3 will follow from this characterization.

## 3.2 Etude de l'équation de Jacobi

Given a Lorentzian surface  $(X, K)$  with a Killing vector field  $K$ , the Jacobi equation along a non-null geodesic  $\gamma$  writes :

$$u'' + \epsilon \kappa u = 0, \tag{3.3}$$

where  $\kappa(t)$  is the curvature along the geodesic  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ . The restriction on the sign of the sectional curvature in the Riemannian setting leads to deep knowledge about the dynamics of the geodesic flow, through the behavior of the Jacobi fields. Unfortunately, this hypothesis makes no sense in the Lorentzian setting, since the quantity involved in the Jacobi equation in this case is  $\epsilon \kappa$ , where  $\epsilon$  is the type of the geodesic. So in this paragraph, we shall investigate some properties of the solutions of the differential equation (3.3) under certain restrictive assumptions on the function  $\kappa(t)$ . The results will be applied in the case of a Lorentzian torus with a Killing vector field in the next paragraph.

**Lemme 3.2.1.** (see [2, Remark 1.3]). *Given two independent solutions of the Jacobi equation, between two zeros of one solution, there is one and only one zero of the other.*

Now, denote by  $s$  and  $c$  the linearly independent solutions of (3.3) satisfying

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} c(0) = 1 \\ c'(0) = 0 \end{cases}$$

It's easy to check that  $(cs' - c's)(t) = (cs' - c's)(0) = 1$  for all  $t \in I$ . Assume  $\kappa(t)$  is periodic, of period  $2\tau$ . Denote by  $A$  the endomorphism of the vector space  $V$  of the solutions of (3.3) (generated by  $s$  and  $c$ ), and given by

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V \\ u(t) &\longmapsto u(t + 2\tau) \end{aligned}$$

Equation (3.3) has a periodic solution if and only if the endomorphism  $A$  has eigenvalue 1 ; in this case, the periodic solutions of the equation are exactly the eigenvectors associated with this eigenvalue.

The zeros of a non-trivial solution  $\phi$  of (3.3) are simple, because  $\phi(a) = \phi'(a) = 0$  for some  $a$  implies  $\phi = 0$ . Now, let  $\zeta_1 < \zeta_2$  be two consecutive zeros of a solution of (3.3). By Lemma 3.2.1, there is a unique zero  $\zeta$  of  $s$  in  $[\zeta_1, \zeta_2]$ . Denote by  $P$  the set of all such pairs of zeros, for all the non-trivial solutions of (3.3), and define

$$P^+ = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in P, s'(\zeta) > 0\} \quad \text{and} \quad P^- = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in P, s'(\zeta) < 0\}.$$

**Lemme 3.2.2 (Separation of zeros).** *Consider the differential equation (3.3), and let  $\tau$  be the minimum distance between two zeros of  $s$ . Suppose we have the following conditions :*

1)  $\kappa(t)$  is even and periodic, of period  $2\tau$ . It is easy to check that under this condition,  $s$  is odd and  $c$  is even.

2)  $s$  is periodic, of period  $2\tau$ .

Denote by  $\alpha > 0$  a value of  $s$ . Define

$$S_\alpha = \{t \in \mathbf{R}, |s(t)| = \alpha\}.$$

Suppose that  $\alpha$  is such that  $S_\alpha$  doesn't contain any zero of  $s'$  ;  $S_\alpha$  is then a discrete set. Then :

- two consecutive zeros in  $P^+$  of any solution of (3.3) are separated by two distinct elements of  $S_\alpha$  if and only if  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ , where  $t_0, t_1$  are the smallest positive consecutive reals in  $S_\alpha$ .

- two consecutive zeros in  $P^-$  of any solution of (3.3) are separated by two distinct elements of  $S_\alpha$  if and only if  $-c(t'_0) - c(t'_1) + 2\frac{c'(\tau)}{s'(\tau)}s(t'_0) \geq 0$ , where  $t'_0, t'_1$  are the biggest elements  $< \tau$  in  $S_\alpha$ .

*Démonstration.* We start with the following observation : consider two independent solutions of (3.3) with  $a_1$  and  $a_2, b_1$  and  $b_2$  the two respective zeros in  $[-\tau, \tau]$  such that  $a_1 < b_1$  and  $a_2 < b_2$  ; Lemma 3.2.1 ensures the existence of a one-to-one correspondence between  $]a_1, b_1[$  and  $]a_2, b_2[$  that sends  $t \in ]a_1, b_1[$  to the unique zero in  $]a_2, b_2[$  of the solution (taken up to a multiplicative constant) vanishing at  $t$ .

If  $u$  is a solution of (3.3) such that  $u(\zeta_1) = u(\zeta_2) = 0$ , then  $v(t) := u(t + 2k\tau), k \in \mathbf{Z}$ , is a solution that vanishes at  $\zeta'_1 := \zeta_1 - 2k\tau$  and  $\zeta'_2 := \zeta_2 - 2k\tau$ . Moreover,  $(\zeta_1, \zeta_2)$  are separated by two zeros of  $S_\alpha$  if and only if it is the same for  $(\zeta'_1, \zeta'_2)$ . Since one can suppose that either  $\zeta'_1 \in [-\tau, 0]$  or  $\zeta'_1 \in [0, \tau]$  it suffices to show the separation lemma when  $\zeta = 0$  and  $\zeta = \tau$  ( $\zeta$  being the unique zero of  $s$  in  $[\zeta_1, \zeta_2]$ ).

Denote by  $\phi_0$  and  $\phi_1$  the two solutions vanishing at  $-t_0$  and  $-t_1$  respectively, defined by

$$\phi_i(t) = c(t) + \frac{c(t_i)}{s(t_i)}s(t), \quad i = 0, 1.$$

By definition,  $s(t_0) = s(t_1)$ . An easy computation then gives for  $i = 0, 1$  :

- .  $\phi_i(-t_i) = 0$
- .  $\phi_i(0) = 1$

$$\cdot \phi_i(t_{1-i}) = c(t_0) + c(t_1).$$

When  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ ,  $\phi_i(0)$  and  $\phi_i(t_{1-i})$  are both non-negative so that  $\phi_i$  doesn't vanish on  $[0, t_{1-i}[$  by Lemma 3.2.1. Denote by  $z_0$  and  $z_1$  the zeros of  $\phi_0$  and  $\phi_1$  respectively in  $[0, \tau]$ ; we thus have  $z_0 \geq t_1$  and  $z_1 \geq t_0$ , the last inequalities being reversed when  $c(t_0) + c(t_1) < 0$ . Hence, using the above observation, we deduce that when  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$  is satisfied, two consecutive zeros in  $[-\tau, \tau]$  of a solution of the Jacobi equation are always separated by two elements of  $S_\alpha$ . Now, suppose that  $c(t_0) + c(t_1) < 0$ , one can find, using the same observation as above, a solution of (3.3) vanishing at  $z_0$  and  $z_1$  in  $[-\tau, \tau]$ , such that  $-t_0 < z_0 < 0$  and  $0 < z_1 < t_1$ .

In the same way, two consecutive zeros in  $[0, 2\tau]$  of a solution of the Jacobi equation are separated by two elements of  $S_\alpha$  if and only if

$$\psi(2\tau - t'_1) + \psi(2\tau - t'_0) \geq 0,$$

where  $\psi$  is the solution satisfying  $\psi(\tau) = 1, \psi'(\tau) = 0$ . This solution is given by  $\psi(t) = \frac{1}{c(\tau)}(c(t) - \frac{c'(\tau)}{s'(\tau)}s(t))$ . Now an easy computation gives

$$c(2\tau - t) = c(t) - 2\frac{c'(\tau)}{s'(\tau)}s(t).$$

Indeed,  $c(2\tau - t)$  is again a solution of (3.3) : write  $c(2\tau - t) = \lambda_1 c(t) + \lambda_2 s(t)$ . Setting successively  $t = 0$  and  $t = \tau$  yields  $\lambda_1 = c(2\tau) = 1/s'(2\tau) = 1$ , and  $\lambda_2 = -2c'(\tau)/s'(\tau)$ . Now, observe that  $c(\tau) < 0$  for, if not,  $c$  would vanish twice in  $[0, \tau]$ , and this is not possible by lemma 3.2.1. This ends the proof.  $\square$

**Notation :** Fix  $\alpha > 0$  a value of  $s$ , and consider an interval  $I$  of  $\mathbf{R}$ . The property that two consecutive zeros in  $I$  (if they exist) of any solution of (3.3) are separated by two distinct elements of  $S_\alpha$  will be referred to as the property  $(\mathfrak{P})$ .

**Definition 3.2.3.** We say that an interval  $I_\alpha = ]x, y[$  of  $\mathbf{R}$  is a domino associated to  $\alpha$  if  $x, y \in S_\alpha$  and  $I_\alpha$  contains only one element of  $S_\alpha$ .

Recall that one of the solutions of (3.3), denoted by  $\beta$ , is given by the normal component of  $K$  on  $\gamma$ . Suppose that  $\gamma$  is a geodesic in the extension associated to  $X$  (hence the solutions of (3.3) are defined on  $\mathbf{R}$ ). Assume further that  $\beta$  vanishes without being identically zero and that  $\gamma$  is parametrized so that  $\beta(0) = 0$ . We prove in Lemma 3.3.8 that  $\beta$  is an odd function, so that  $\beta = \beta'(0)s$ . In this case, when  $\alpha = |C|/\beta'(0)$ , where  $C$  is the Clairaut constant related to  $\gamma$ , if  $I_\alpha$  is a domino of  $\mathbf{R}$ , then the geodesic restricted to  $I_\alpha$  lies in a domino of the surface, in the sense of Definition 1.1.1.

**Corollaire 3.2.4.** Suppose the conditions of Lemma 3.2.2 are satisfied, and that in addition, there exist exactly two elements of  $S_\alpha$  in  $[0, \tau]$ , hence between any two zeros of  $s$ . Keeping the same notations as in Lemma 3.2.2, we have :

- the domino containing 0 has the property  $(\mathfrak{P})$  if and only if  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ ,
- the domino containing  $\tau$  has the property  $(\mathfrak{P})$  if and only if  $-c(t_0) - c(t_1) + 2\frac{c'(\tau)}{s'(\tau)}s(t_0) \geq 0$ .

**Lemme 3.2.5.** *Consider the differential equation (3.3). Suppose in addition to the conditions in Lemma 3.2.2 that  $\kappa$  is  $\tau$  periodic and  $s$  is  $\tau$  antiperiodic, i.e.*

$$s(\tau + t) = -s(t), \forall t \in \mathbf{R}.$$

*Then the domino containing 0 has the property ( $\mathfrak{P}$ ) if and only if  $s$  realizes the minimum distance between the zeros of the solutions of the equation (3.3).*

*Démonstration.* An easy computation gives

$$c(\tau - t) = 2 \frac{c(\tau/2)}{s(\tau/2)} s(t) - c(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.4)$$

In this case, we have  $t_1 = \tau - t_0$  so that  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$  reads  $c(\tau/2) \geq 0$ .

Let  $z_0$  and  $z_1$  be two any consecutive zeros of a solution of equation (3.3). If  $\phi$  is a solution of (3.3),  $\phi(\cdot + \tau)$  is also a solution, so one can assume that  $z_0 \in ]-\tau, 0[$ . Write

$$\phi(t) = c(t) - \frac{c(z_0)}{s(z_0)} s(t),$$

we have  $\phi(z_0) = 0$ ,  $\phi(0) = 1$ , and  $\phi(z_0 + \tau) = -2 \frac{c(\tau/2)}{s(\tau/2)} s(z_0)$ , by formula (3.4) above.

We see that  $\phi(0)$  and  $\phi(z_0 + \tau)$  have the same sign if and only if  $c(\tau/2) \geq 0$ . In this case,  $\phi$  doesn't vanish on  $[0, z_0 + \tau[$  by Lemma 3.2.1, and  $z_1 \geq z_0 + \tau$ . This ends the proof.  $\square$

Lemma 3 in [5] gives a result on the zeros of the solutions of the differential equation

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0, \quad (3.5)$$

under certain restrictive assumptions on the function  $p(x)$ . Under these assumptions, the even solution of the equation realizes the minimum distance between such zeros. We shall adapt the lemma to the case where the coefficient is a periodic function; the same proof works in this case.

**Lemme 3.2.6.** *Let  $p(x)$  have the following properties :*

- (a)  *$p$  is continuous;*
- (b)  *$p(-x) = p(x)$ ;*
- (c) *the even solution of the differential equation (3.5) vanishes for  $\delta > 0$  and does not vanish for  $-\delta < x < \delta$ ;*
- (d)  *$p(x)$  is non-increasing for  $0 < x < \delta$ ;*
- (e)  *$p$  is periodic, with period  $2\delta$ .*

*Let  $\delta_1, \delta_2$  be any pair of consecutive zeros of any non-trivial solution of (3.5). Then*

$$\delta_2 - \delta_1 \geq 2\delta.$$

**Note :** in [5], the condition (d) reads " $p(x)$  is non-increasing for  $0 < x < +\infty$ ". When  $p(x)$  is assumed to be periodic of period  $2\delta$ , it is enough to suppose this property on  $]0, \delta[$ .

### 3.3 Points conjugués des tores lorentziens avec un champ de Killing

#### 3.3.1 Les points conjugués résultant du champ de Killing

Given a Lorentzian torus with Killing field  $K$ , modeled on  $E_f^u$ , we have the following result from [3] :

**Theorem 3.3.1.** ([3, Theorem 5.29]). *Let  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  be a non-constant periodic function, and let  $T$  be a torus modeled on  $E_f^u$ . If  $T$  has no conjugate points, then :*

- (1) *the set of connected components of  $\{f \neq 0\}$  is locally finite,*
- (2)  *$f$  changes sign between bands with a common boundary,*
- (3)  *$f'$  changes sign once in a band,*
- (4) *each component defines a type II band in the torus.*

Recall that a critical orbit of  $K$  is an orbit corresponding to a critical point of  $\langle K, K \rangle$ . These leaves are geodesics (they are exactly the set of leaves of  $K$  on which  $\nabla_K K = 0$ ).

**Lemme 3.3.2.** *On a torus such that condition (3) is satisfied, the critical orbits of  $K$  are without conjugate points.*

*Démonstration.* The curvature is given by  $\kappa = f''(x)/2$  in the  $x$ -coordinate. From hypothesis (3), it follows that a local maximum of  $f$  is necessarily positive and a local minimum is negative. This yields the following :

**Fait 3.3.3.** *The timelike critical orbit of  $K$  corresponding to a local minimum of  $f$  lies in a region of non-negative curvature, and the spacelike critical orbit (corresponding to a local maximum of  $f$ ) lies in a region of non-positive curvature. On the other critical orbits of  $K$ , we have  $\kappa = 0$ .*

It is then straightforward that equation (3.3) does not have a solution vanishing twice on such geodesics.  $\square$

As pointed out in the introduction of this paper, we restrict our attention to non-null geodesics. The geodesics perpendicular to  $K$  are already known to be without conjugate points in the torus (see [2, Proposition 1.8]); this also holds for the geodesics such that  $\beta$  does not vanish, by Lemma 3.2.1. We are left with the case in which  $\gamma$  is not perpendicular to  $K$  and  $\beta$  vanishes without being identically zero. We begin by investigating the conjugate points produced by  $\beta$ .

The geodesics are always thought of as being in the extension  $E_f^u$ . Recall that the Killing field in  $E_f^u$  is denoted by  $K^u$  (see Theorem 1.2.1).

**Lemme 3.3.4.** *Let  $\gamma$  be a non-null geodesic not perpendicular to  $K^u$ .*

*Assume  $\gamma$  is not a critical geodesic of  $K^u$ . If the torus satisfies conditions (2)-(3) of Theorem 3.3.1 above, we have :*

- (i)  *$\beta$  does not vanish more than one time in a band.*
- (ii) *a geodesic  $\gamma$  tangent to  $K^u$  in the torus leaves the band in which  $\beta$  vanishes and crosses the type I neighboring band in  $E_f^u$ . So if the torus contains only type II bands, the geodesic lies in  $\tilde{T}$  exactly in a domino.*



*Démonstration.* (i) Let  $p$  be a point where  $\gamma$  is tangent to  $K$  in the torus, and call  $B$  the band containing  $p$ . Define  $U := \{z \in B, z \text{ is an extremum of } \langle K, K \rangle\}$ ; condition (3) on  $f$  implies that this set is connected, hence splits the band into two connected components. In the interior of the band,  $K$  has type  $\epsilon$ , so the function  $\epsilon \langle K, K \rangle$  is positive on  $B$ . Suppose  $\beta$  vanishes another time in  $B$ . It appears from the formula  $\epsilon \langle K, K \rangle = C^2 - \beta^2$  that  $p$  is a local maximum of  $\epsilon \langle K, K \rangle$  on  $\gamma$ , so if  $q$  is the closest point to  $p$  in which  $\beta$  vanishes,  $p$  and  $q$  are necessarily in the same connected component, and in addition,  $\epsilon \langle K, K \rangle$  is decreasing from  $p$  to  $q$ . Now since  $\langle K, K \rangle(p) = \langle K, K \rangle(q) = \epsilon C^2$ , this means that  $\epsilon \langle K, K \rangle$  is constant between the two points, thus  $\gamma$  is a critical orbit of  $K$ , contrary to our assumption.

(ii) If  $\gamma$  remains in  $B$ , it asymptotically approaches an orbit of  $K$  contained in  $B$  on which the norm of  $K$  is the same as on the point where  $\gamma$  is tangent to  $K$  (see Lemma 2.3.1); the same argument above shows that this is impossible. It follows that  $\gamma$  leaves the band from both sides. Now, since  $f$  changes sign between two consecutive bands,  $\gamma$  cannot cross the type III neighboring band. Repeated application of Lemma 2.3.1 shows that  $\gamma$  cannot remain in that band either. In addition,  $\gamma$  cannot cross a type II band unless it is perpendicular to  $K$ . So  $\gamma$  crosses the type I neighboring band.  $\square$

**Corollaire 3.3.5.** *If  $(T, K)$  is a torus satisfying the hypotheses in Theorem 3.3.1, then the Killing vector field doesn't produce conjugate points in the torus.*

*Démonstration.* Let  $\gamma$  be a geodesic, lifted and then extended to  $E_f^u$ , such that  $\beta$  vanishes at least twice. We have to prove that we cannot have two zeros of  $\beta$  in the torus. This follows from the fact that the geodesic crosses a type I band between two such zeros as a consequence of Lemma 3.3.4 above. When the torus is assumed to have only type II bands, these zeros are never both in the torus.  $\square$

### 3.3.2 Géodésiques invariantes et points conjugués

We begin by stating a lemma that will be used at the end of this section. Choose an orientation on the torus, and let  $p \in T$  be a point such that  $\langle K(p), K(p) \rangle = 0$ . If the orbit of  $K$  containing  $p$  belongs to the first line of the null cone bordering the negative cone, fix a null vector field  $L$  in the maximal ribbon of  $\tilde{T}$  containing  $p$  such that  $\langle L, K \rangle = -1$ ; otherwise, take  $L$  such that  $\langle L, K \rangle = 1$ . This way, we get a local coordinate  $x$  in the ribbon containing  $p$ , which we globalize to  $E_f^u$  in a unique way.

**Lemme 3.3.6.** *Let  $\gamma$  a geodesic in  $E_f^u$ , then*

$$\epsilon \beta'(t) = \frac{1}{2} f'(x(\gamma(t))).$$

*Démonstration.* We can assume that the orbit of  $K$  containing  $p$  belongs to the first line of the null cone bordering the negative cone. In the ribbon containing  $p$ , call it  $U$ , set  $K = CT + \beta N$  and  $L = \lambda_1 T + \lambda_2 N$ ;  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are never vanishing functions on  $\gamma$ . In fact, the choice of  $L$  leads to  $\lambda_1 = -\epsilon \lambda_2$ . We have  $\nabla_T K = \beta' N$  and  $\nabla_N K = \beta' T$ . An easy computation then gives  $\nabla_L K = \epsilon \beta' L$ , yielding

$$\frac{1}{2} \nabla_L \langle K, K \rangle = \epsilon \beta'.$$

Now in the ribbon obtained from  $U$  by a generic reflection, the local coordinate is defined by the null vector field  $L'$  such that  $\langle L', K \rangle = 1$ , and  $L'$  belongs to the other null line field. We can check that this gives the same formula, finishing the proof.  $\square$

**Corollaire 3.3.7.** *Let  $(T, K)$  be a torus modeled on  $E_f^u$ , with  $f$  a non-constant periodic function such that  $f'$  changes sign once in a band. Then a non-null geodesic  $\gamma$  that lies in a band provided  $|t|$  is large enough, asymptotically approaches a critical orbit of  $K^u$ , and this orbit is either timelike or spacelike, depending on the type of  $\gamma$ .*

*Démonstration.* Provided  $|t|$  is large enough,  $\gamma$  is transverse to  $K$  (see Lemma 3.3.4, (i)), so an application of Lemma 2.3.1 shows that  $\gamma$  asymptotically approaches a leaf of  $K^u$  whose type is the same as  $\gamma$ 's, i.e.  $x'$  goes to 0 on  $\gamma$ , hence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0, \quad (3.6)$$

since  $x'(t)^2 = \beta(t)^2$ . On the other hand,  $\epsilon\beta'(t)$  converges by Lemma 3.3.6 above; combining this with (3.6), we see that this limit is necessarily zero.  $\square$

Let  $\gamma$  be a non-null geodesic such that  $\beta$  vanishes without being identically zero, parametrized so that  $\beta(0) = 0$ .

**Lemme 3.3.8.** *Assume  $\beta$  vanishes twice and let  $\omega$  be the half-distance between two consecutive zeros (measured in the parameter  $t$  of the geodesic). Then  $\beta$  is odd and periodic, of period  $4\omega$  (in particular, the distance between two consecutive zeros of  $\beta$  is always  $2\omega$ ). Furthermore,  $\kappa$  is a  $4\omega$ -periodic and even function.*

*Démonstration.* The proof is based on a powerful geometric ingredient of Lorentzian tori with a Killing vector field : the generic reflection that fixes a non-degenerate leaf of  $K^\perp$ , defined on the saturation of the leaf by the flow of  $K$ , extends to a global isometry of the extension (see Proposition 1.2.2). A point where  $\beta$  vanishes is either a saddle point or corresponds to a point where  $\gamma$  is tangent to  $K$ , depending on whether the geodesic is orthogonal to  $K$  or not. The behavior being slightly different in each case, we choose to consider them separately. Suppose  $\gamma$  is not a leaf of  $K^\perp$ ; the reflection that fixes the geodesic perpendicular to  $K$  that passes through  $\gamma(0)$  is an isometry that preserves  $\gamma$  (actually, it reverses the orientation), sending  $K$  to  $-K$ ; it sends  $\gamma(t)$  to  $\gamma(-t)$  yielding for all  $t$ ,  $\beta(-t) = -\beta(t)$ . Composing two reflections that correspond to two consecutive zeros of  $\beta$  gives an isometry preserving  $\gamma$ , which is actually a translation of the parameter  $t$  by  $4\omega$ . It sends  $\gamma(t)$  to  $\gamma(t + 4\omega)$ , and gives for all  $t$ ,

$$\beta(t + 4\omega) = \beta(t),$$

as expected. Now suppose that  $\gamma$  is perpendicular to  $K$ ;  $\beta$  vanishes at the saddle points. Let  $p$  be a saddle point on  $\gamma$ . According to [3], we might choose two generic reflections each one fixing a leaf of  $K^\perp$  passing through  $p$ , such that their composition is the reflection with respect to  $p$ . It is not hard to see that the obtained reflection is an isometry preserving  $\gamma$ ; it again reverses its orientation and sends  $K$  to  $-K$ . Composing two such reflections as before (corresponding to two saddle points), the same conclusions follow.

The same arguments provide the proof of the statement on  $\kappa$ .  $\square$



**Definition 3.3.9.** A geodesic of  $E_f^u$  with  $\beta$  a non-zero periodic function is called " $\beta$ -periodic" or an "invariant geodesic", for they are invariant by an isometry of the extension.

The term " $\beta$ -periodic" will be adopted below because it seems to be more suggestive of the type of resulting Jacobi equation. We simply say "periodic geodesic" instead of " $\beta$ -periodic".

If we suppose that  $f$  has simple zeros, the geodesics perpendicular to  $K$  are all periodic.

**Corollaire 3.3.10.** Let  $\gamma$  be a non-null geodesic tangent to  $K$  in the torus; we distinguish two different behaviors of  $\gamma$  in  $E_f^u$ : either  $\gamma$  is periodic, or it asymptotically approaches a critical orbit of  $K$  with infinite  $t$ ; in this case, the geodesic is tangent to  $K$  only one time.

*Démonstration.* If  $\gamma$  cuts a null orbit of  $K^u$  denoted by  $l$ , we claim that  $\gamma$  crosses a type I band  $B$  containing  $l$  if and only if  $C^2 > \sup_B \epsilon \langle K^u, K^u \rangle$ . Indeed, if  $\gamma$  crosses a type I band, it is everywhere transverse to  $K^u$  in that band, for if  $\beta$  vanishes, either  $\gamma$  remains in the band or it crosses a type III band containing  $l$ . Writing  $C^2 - \beta^2 = \epsilon \langle K^u, K^u \rangle$ , we see that  $C^2 > \sup_B \epsilon \langle K^u, K^u \rangle$ . Now, assume this inequality holds, then the same argument as in the proof of Lemma 3.3.4, (ii), shows that  $\gamma$  crosses the type I band  $B$ . In fact, as long as this inequality holds,  $\gamma$  remains in the ribbon containing  $l$ , by cutting the leaves of  $K^u$  transversally.

Now, if  $\gamma$  enters a band where  $C^2$  is reached by  $\epsilon \langle K^u, K^u \rangle$  in that band, using Corollary 3.3.7 and the previous lemma, we distinguish two different cases :

- a)  $C^2$  is not a critical value of  $f$ ; in this case,  $\gamma$  meets tangentially the closest orbit of  $K^u$  to the boundary of the band meeting  $\gamma$ , on which  $C^2 = \epsilon \langle K^u, K^u \rangle$ , so that  $\beta$  vanishes a second time. The geodesic is thus periodic.
- b)  $C^2$  is a critical value of  $f$ , which amounts to saying that the corresponding orbit of  $K^u$  is a geodesic. In this case, if the closest orbit of  $K^u$  to the boundary meeting  $\gamma$  is not a geodesic, then  $\gamma$  behaves as in a); otherwise, it approaches the orbit asymptotically, with an infinite  $t$ .  $\square$

**Remarque 3.3.11.** This corollary holds for every torus modeled on  $E_f^u$  such that  $f$  is a non-constant periodic function. When assumptions (2)-(3) in Theorem 3.3.1 hold, the periodic geodesics leave every maximal ribbon in  $E_f^u$ , by crossing a type I band between two zeros of  $\beta$ .

Denote by  $\mathcal{L}_K(T)$  the space of smooth Lorentzian metrics on the 2-torus  $T$  admitting a non-trivial Killing field.

**Definition 3.3.12.** Define  $\mathcal{L}_K^*(T)$  as the subset of  $\mathcal{L}_K(T)$  such that the function  $f$  induced by the norm of  $K$  has simple zeros and satisfies conditions (3)-(4) of Theorem 3.3.1. In particular, the assumption " $f$  has simple zeros" implies conditions (1)-(2) of Theorem 3.3.1.

Given a torus in  $\mathcal{L}_K^*(T)$ , using the results in section 3.2, we shall give a necessary and sufficient condition for geodesics (other than the critical orbits of  $K$ ) tangent to  $K$  in the torus to be without conjugate points in it.

Recall that when assumptions (2)-(3) in Theorem 3.3.1 hold, if  $\gamma$  is a geodesic tangent to  $K$  at  $p \in T$ , and not a critical orbit of  $K$ , then  $p$  is the unique point of  $T$  where  $\gamma$  is tangent to  $K$ .

**Proposition 3.3.13 (Characterization of geodesics without conjugate points).** *Let  $(T, K)$  be a torus modeled on  $E_f^u$ , with  $f$  satisfying the properties in Theorem 3.3.1. Let  $\gamma$  be a geodesic tangent to  $K$  in the torus; assume  $\gamma$  is not a critical orbit of  $K$  and set  $t = 0$  at this point. Then  $\gamma$  is without conjugate points in the torus if and only if  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ , where  $t_0, t_1$  are the smallest positive consecutive reals such that the norm of  $K$  vanishes on  $\gamma$ .*

*Démonstration.* The two reals  $t_0$  and  $t_1$  do exist by Lemma 3.3.4. The geodesic lies in the torus in a domino, either for  $t \in [-t_1, t_0]$  or for  $t \in [-t_0, t_1]$ ,  $t_0$  and  $t_1$  being as in the statement above. Assume  $\gamma$  is periodic; if  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ , the intervals  $[-t_1, t_0]$  and  $[-t_0, t_1]$  satisfy the property  $(\mathfrak{P})$  for  $\alpha = |C|$ , by Lemma 3.2.2. All we have to show is that this implies that  $\gamma$  is without conjugate points in the torus. Setting  $\alpha = |C|$ ,  $S_\alpha$  is the set of points in which the norm of  $K$  vanishes. Assume  $(\mathfrak{P})$  is satisfied on  $[-t_1, t_0]$ , i.e. two zeros of any solution of (3.3) in  $[-t_1, t_0]$  (or in  $[-t_0, t_1]$ ) are separated by two zeros of  $\langle K, K \rangle$ . Since  $\gamma$  lies in  $T^2$  in a domino, it contains only one zero of  $\langle K, K \rangle$  in the torus. Therefore, two zeros of a solution of (3.3) cannot be both in the torus. Now, suppose that  $c(t_0) + c(t_1) < 0$ ; one can find by Lemma 3.2.2 a Jacobi field along  $\gamma$  vanishing at  $z_0$  and  $z_1$  in  $[-2\omega, 2\omega]$ , such that  $-t_0 < z_0 < 0$  and  $0 < z_1 < t_1$ .

The case in which  $\gamma$  asymptotically approaches a critical orbit of  $K$  works in much the same way by proving, following Lemma 3.2.2, that the property  $(\mathfrak{P})$  is again equivalent to having  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$ . The detailed verification is left to the reader.  $\square$

**Theorem 3.3.14.** *Let  $(T, K)$  be a torus in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  modeled on  $E_f^u$ . Denote by  $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  the sequence of zeros of  $f$ , the  $x_n$ 's being taken in increasing order. If the torus has no conjugate points, then*

$$f'(x_n) + f'(x_{n+1}) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

*Démonstration.* Denote again by  $(0), \dots, (n)$  the distinct bands of the torus,  $(i)$  and  $(i+1)$  having a common boundary and opposite signs. Denote by  $x_i < x_{i+1}$  the zeros of  $f$  in the band  $(i)$ .

Let  $\gamma$  be a geodesic tangent to  $K$  in a band  $(i)$  of the torus. Set  $t = 0$  at this point. For  $|C|$  small enough, the geodesic crosses one type I band before  $\beta$  vanishes again in a copy of the band  $(i+2)$  of the ribbon containing  $(i)$ . The torus contains an isometric image of the geodesic  $\gamma$  restricted to a domino containing the zero of  $\beta$  in  $(i)$ , and an isometric image of the geodesic restricted to a domino containing the zero of  $\beta$  in  $(i+2)$ . By Corollary 3.2.4 and Lemma 3.3.13, these geodesics are without conjugate points in the torus if and only if  $c(t_0) + c(t_1) \geq 0$  and  $-c(t_0) - c(t_1) + 2 \frac{c'(2\omega)}{s'(2\omega)} s(t_0) \geq 0$ . Consider a sequence of geodesics  $\gamma_n$  approaching a non-degenerate geodesic  $\gamma_\infty$  perpendicular to  $K$ . Then,  $|C|$  tends to 0,  $t_0^n \rightarrow 0$ , and  $t_1^n \rightarrow 2\omega_\infty$ , where  $\omega_\infty$  is associated to  $\gamma_\infty$ . We admit that  $c(t_0) + c(t_1)$  depends continuously on  $\gamma$  (this will be proved in section 5). Letting  $|C|$  go to 0, we have

$$c_n(t_0^n) + c_n(t_1^n) \rightarrow c_\infty(0) + c_\infty(2\omega_\infty)$$

$$\text{and } -c_n(t_0^n) - c(t_1^n) + 2 \frac{c'_n(2\omega_n)}{s'_n(2\omega_n)} s_n(t_0^n) \rightarrow -c_\infty(0) - c_\infty(2\omega_\infty),$$

where the solution  $c_\infty$  associated to  $\gamma_\infty$  is then evaluated at two consecutive saddle points of  $\gamma_\infty$ . Denote them by  $p_i$  and  $p_{i+1}$ . On the other hand,

$$c_\infty(0) + c_\infty(2\omega) = \frac{1}{s'_\infty(0)} + \frac{1}{s'_\infty(2\omega)} = \frac{\beta'_\infty(p_i) + \beta'_\infty(p_{i+1})}{\beta'_\infty(p_i)\beta'_\infty(p_{i+1})}.$$

We see that if the torus is without conjugate points,  $c_\infty(0) + c_\infty(2\omega)$ , and then  $\beta'_\infty(p_i) + \beta'_\infty(p_{i+1})$  should be zero. Using Lemma 3.3.6, this yields  $f'(x_i) + f'(x_{i+1}) = 0$ , for all  $i$ .  $\square$

**Remarque 3.3.15.** *The geodesic parametrization of a null orbit of  $K$  is incomplete if and only if it corresponds to a simple zero of  $f$ .*

**Remarque 3.3.16.** *When the geodesic is incomplete, it is easy to see that a geodesic parametrization is given by  $-2(\eta f')^{-1} e^{-\frac{1}{2}\eta f' t}$ , where  $K = \partial_t$ , and  $\eta = \pm 1$  depends on the null orbit of  $K$  and the choice of the  $x$ -coordinate (once the coordinate is fixed, two consecutive null orbits of  $K$  in the torus give  $(\eta_1, \eta_2)$ , such that  $\eta_1 + \eta_2 = 0$ ); therefore, Theorem 3.3.14 above can be stated in a more geometric way, as in Theorem 3.1.3 in the introduction of this section.*

**Corollaire 3.3.17.**  *$T_{CP}$  can be obtained as a limit of Lorentzian tori with conjugate points, and admitting a Killing field.*

**Remarque 3.3.18.** *In [2] it is shown that the space of Lorentzian tori without conjugate points is a closed subset of  $\mathcal{L}(T)$  endowed with the  $C^\infty$  topology, and that the Clifton-Pohl torus is on the boundary of this set. In the proof, the construction of the sequence of such metrics converging to  $T_{CP}$  killed the Killing vector field.*

### 3.3.3 Une classe de tores lorentziens sans points conjugués

The local geometry of a Lorentzian torus with a Killing vector field is determined by the function  $f$  induced by the norm of  $\tilde{K}$  in the  $x$ -coordinate of the universal cover. In privileging this point of view, we obtain a family of Lorentzian tori without conjugate points admitting a Killing vector field with pairwise non-isometric universal cover; these examples include the Clifton-Pohl torus and quadratic variations of it.

Our examples are in  $\mathcal{L}_K^*(T)$ . In addition, we assume that  $f$  has two zeros in its smallest period, and that  $\exists a \in \mathbf{R}$ ,  $f(a+t) = f(a-t)$  (in particular,  $n = 2$ ). We then get additional isometries in  $E_f^u$ , known as non-generic reflections in [3], that lead to additional symmetries on the  $\beta$  solution. In this case, given a non-null geodesic  $\gamma$ , not perpendicular to  $\tilde{K}$ , the behavior in b), Corollary 3.3.10, does not appear, and  $\beta$  vanishes -at  $t = 0$  (without being identically zero) if and only if the geodesic is periodic. With the additional assumption on  $f$ ,  $\kappa$  has two symmetries, one of which about  $t = 0$  and the other about  $t = \omega$ , hence  $\kappa$  is  $2\omega$  periodic, and  $\beta$  satisfies the following :

$$\beta(2\omega - t) = \beta(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

The symmetry about  $t = \omega$  can be seen using the following fact : the composition of the non-generic reflection that fixes the leaf of  $K$  corresponding to  $t = \omega$ , and the generic reflection that fixes the geodesic perpendicular to  $K$  passing through  $\gamma(0)$ , is an isometry that preserves  $\gamma$  (and reverses the orientation).

In this case, Lemma 3.2.5 together with Proposition 3.3.13 imply that the absence of conjugate points in the torus for such geodesics is equivalent to the fact that  $\beta$  realizes the minimum distance between the zeros of the solutions of the Jacobi equation. A large class of Lorentzian tori with no conjugate points is given in the following theorem :

**Theorem 3.3.19.** *Let  $f$  be a periodic function that satisfies the following properties :*

i)  $f$  has simple zeros,

ii)  $f'$  changes sign one time in a band,

iii)  $f' \cdot f''' \leq 0$ ,

iv)  $\exists a \in \mathbf{R}, f(a+t) = f(a-t)$ ,

v)  $f$  has two zeros in the smallest period of  $f$ .

*Then, a torus modeled on  $E_f^u$  and all of whose bands are of type II has no conjugate points.*

*Démonstration.* Let  $\gamma$  be a non-null geodesic, and assume that  $\beta$  vanishes. Either  $\beta$  is identically zero, in which case the geodesic is a critical orbit of  $K$  without conjugate points (Lemma 3.3.2), or it isn't identically zero, then  $\gamma$  is periodic. The geodesic therefore has no conjugate points in the torus if and only if  $\beta$  realizes the minimum distance between the zeros of the non-trivial solutions of the Jacobi equation. Put  $p(t) = \epsilon\kappa(t + \omega)$  and consider the differential equation

$$u''(t) + \epsilon\kappa(t + \omega)u(t) = 0 \quad (3.7)$$

We have the following :

i)  $p$  is even ; this is a consequence of  $\kappa$  being even and  $2\omega$  periodic. Indeed, write  $p(-t) = \epsilon\kappa(-t + \omega) = \epsilon\kappa(t - \omega) = \epsilon\kappa(t + \omega) = p(t)$  ;

ii) the even solution is given by  $\beta(t + \omega)$  ;

iii)  $p(t)$  is decreasing for  $0 < t < \omega$ .

To see this, denote  $x_1 < x_2$  two consecutive critical points of  $f$  which correspond to extremal values. Condition (ii) implies that  $f'$  does not change sign on  $]x_1, x_2[$ . Since the curvature is given by  $f''(x)/2$  in the  $x$  coordinate, the condition  $f' \cdot f''' \leq 0$  implies that on a ribbon,  $\kappa$  is either decreasing or increasing between the two orbits of  $K$  corresponding to  $x_1$  and  $x_2$ , depending on whether  $f$  reaches its minimal value on  $x_1$  or  $x_2$ . Now the geodesic is transverse to  $K$  over  $]0, 2\omega[$  and lies in a ribbon of the Lorentzian surface  $E_f^u$ . Since  $n = 2$ , the geodesic crosses only one extremal orbit of  $K$  between 0 and  $2\omega$ , the one corresponding to  $t = \omega$ . We then get that  $\kappa(t)$  is decreasing (resp. increasing) for  $\omega < t < 2\omega$  if the geodesic is spacelike (resp. timelike), implying condition (iii).

Given Lemma 3.2.6, the even solution  $\beta(t + \omega)$  then realizes the minimum distance between the zeros of the non-trivial solutions of equation (3.7). Therefore, when the torus has only type II bands, these geodesics have no conjugate points in the torus. This completes the proof of Theorem 3.3.19.  $\square$

### 3.3.4 Des exemples de tores lorentziens sans points conjugués

**Definition 3.3.20.** We call a quadratic variation of the Clifton-Pohl torus a metric of the form

$$g = \frac{2dxdy}{Q(x, y)},$$

where  $Q$  is a positive definite quadratic form of determinant 1.

**Proposition 3.3.21.** The quadratic variations of the Clifton-Pohl torus are contained in the family obtained in Theorem 3.3.19.

*Démonstration.* Considering  $-g$  instead of  $g$  if necessary, we can assume that the quadratic forms are given by

$$Q(x, y) = ux^2 + 2vxy + wy^2, \quad \text{with } u > 0, w > 0, uw - v^2 = 1.$$

Write  $Q(x, y) = (\sqrt{u}x + \frac{v}{\sqrt{u}}y)^2 + (\frac{1}{\sqrt{u}}y)^2$ . Applying the change of variables  $x' = \sqrt{u}x, y' = \frac{1}{\sqrt{u}}y$ , we reduce to the metrics of the form

$$g = \frac{2dxdy}{x^2 + (y + ax)^2},$$

where  $a \in \mathbf{R}$ . These metrics admit a Killing vector field given by  $K = x\partial_x + y\partial_y$ . We have now

$$\kappa = -2\langle K, K \rangle - 2a.$$

Hence,  $f$  is a solution of the differential equation

$$f''(x) + 4f(x) - 4a = 0,$$

and it is given by  $f(x) = \sin(2x) - 2a \cos^2(x)$ .

The Clifton-Pohl torus and its quadratic variations are then contained in the family obtained before, and are therefore without conjugate points.  $\square$

Other examples of Lorentzian tori without conjugate points, belonging to this family, are given at the end of the last chapter.



# Chapitre 4

## Stabilité des tores lorentziens sans points conjugués en dimension 2

### 4.1 Description des résultats

We prove that some of new examples given in the previous chapter of lorentzian tori without conjugate points (including the Clifton-Pohl torus) admit a large space of deformations among metrics without conjugate points.

In the Riemannian setting, it is known from Hadamard's theorem that non-positive curvature implies that there are no conjugate points; therefore, it is easy to get open sets of Riemannian metrics without conjugate points in the  $C^2$  topology. In the Lorentzian general setting, the stability question is a little harder; in fact, the restriction on the sign of the sectional curvatures is no help since the Jacobi equation involves also the type  $\epsilon$  of the geodesic. If we drop the assumption concerning the additional symmetries on the universal cover of the torus, we show that the absence of conjugate points for a Lorentzian torus admitting a Killing field can be expressed in terms of the positivity of some numeric function defined on an open subset of the torus. The method used has the disadvantage of not providing a geometric ingredient to construct metrics without conjugate points, but it suggests that one can expect a stability result among the metrics admitting a Killing field. Recall that  $\mathcal{L}_K(T)$  denotes the space of smooth Lorentzian metrics on the 2-torus  $T$  admitting a non-trivial Killing field. We obtain

**Theorem 4.1.1.** *A metric in  $\mathcal{L}_K(T)$  close enough to the Clifton-Pohl metric, for the  $C^\infty$  topology, and satisfying the condition in Theorem 3.1.3 above, has no conjugate points.*

Actually, we prove a more general stability by deformation result in the last section of this paper. This stability result ensures the existence of Lorentzian metrics without conjugate points and admitting a Killing field, without the symmetries added in Theorem 3.1.1. Of course, an important hypothesis all along this paper is the existence of a Killing field. The existence of a metric without conjugate points which does not satisfy this additional assumption is an open question.



## 4.2 Déformation d'un tore lorentzien sans points conjugués

Recall that a torus in  $\mathcal{L}_K(T)$  without conjugate points satisfies conditions (1)-(4) in Theorem 3.3.1. So we defined  $\mathcal{L}_K^*(T)$  to be the subset of Lorentzian tori in  $\mathcal{L}_K(T)$  containing only type II bands (condition (4)), and modeled on  $E_f^u$  such that  $f$  has simple zeros and satisfies the third condition of the theorem (the condition on the zeros implies (1)-(2)). A torus without conjugate points in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  satisfies in addition the property in Theorem 3.3.14, which is a kind of "pointwise symmetry" on  $f$ ; in the sequel we denote by  $S\mathcal{L}_K^*(T)$  the set of Lorentzian metrics in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  satisfying this condition.

The family introduced in Theorem 3.3.19 gives examples of metrics in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  without conjugate points; we wish to know if this property is stable by deformation in  $S\mathcal{L}_K^*(T)$ . Our main concern in this section will be to obtain stability criteria for these metrics, i.e. conditions on  $f$  from which conclusions may be drawn as to the stability character of the property.

This section contains 5 paragraphs. In Paragraph 4.2.1, we prove that for metrics in  $\mathcal{L}_K(T)$ , the Killing field depends smoothly on the metric. This allows us to define in Paragraph 4.2.2 a continuous function depending on the metric, that controls the conjugate points. Recall that the universal cover of a Lorentzian torus admitting a Killing field appears as an open subset of a bigger surface which contains conjugate points. For the stability question, a special interest will be given in paragraphs 4.2.3 and 4.2.4 to the case in which conjugate points are on the boundary. We will give sufficient conditions on the metric to avoid this situation, and obtain in the last paragraph a stability result.

### 4.2.1 Sur le champ de Killing d'une métrique lorentzienne sur le tore

The space of smooth Lorentzian metrics on a torus is equipped with the  $C^r$  topology; since the torus is compact, this space is metrisable. If  $K$  is a Killing field for a metric  $g$ , then  $\lambda K$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}^*$ , is also a Killing vector field for  $g$ . Actually, if a (non-flat) metric on a torus admits a Killing field, then the latter is unique up to a multiplicative constant; this was proved in [3]. To fix one, one fixes an orientation  $\nu$  on the torus and a vector field  $J$  everywhere transverse to  $K$ , together with a point  $p$  on  $T$  in which  $g(K, K)(p) \neq 0$ , and takes  $\lambda_0 K$  such that  $g(\lambda_0 K, \lambda_0 K)(p) = \eta$ ,  $\eta = \pm 1$ , and  $\nu(K, J) > 0$  (the latter is possible, for the foliation of  $K$  is orientable). We simply denote it by  $K$ . This determines  $K$  on the orbit of  $K$  containing  $p$ , and on a null geodesic passing through this point (Clairaut's constant). This way, one determines  $K$  on the saturation of the geodesic by the flow of  $K$ , i.e. on a ribbon; doing it on the ribbons in turn,  $K$  is determined on the whole torus. In the following,  $K$  is fixed this way.

Now consider a sequence of Lorentzian metrics  $g_n \in \mathcal{L}_K(T)$  which converges to a non-flat metric  $g \in \mathcal{L}_K(T)$  in the  $C^r$  topology,  $r \geq 4$ ; denote by  $K$  the Killing vector field of  $g$ ,  $K_n$  that of  $g_n$  for all  $n$ . A natural question is to see whether  $K_n$  converges to  $K$ . For convenience, we start by examining the foliations associated to these vector fields. We want to provide the space of foliations of the torus, denoted by  $\mathcal{F}(T)$ , with a "natural" topology. The line bundle over a torus being a trivial bundle, we choose a trivialization



and we associate to a foliation its tangent field, which is then a smooth map from  $T$  into  $P^1$ . One identifies  $\mathcal{F}(T)$  with its image in  $C^r(T, P^1)$  equipped with the  $C^r$  topology, and gets a topology on  $\mathcal{F}(T)$ ; this topology is independent of the choice of the trivialization.

**Proposition 4.2.1.** *If  $g_n$  is a sequence of Lorentzian metrics in  $\mathcal{L}_K(T)$  converging to a non-flat metric  $g \in \mathcal{L}_K(T)$  for the  $C^r$  topology,  $r \geq 4$ , then the sequence of foliations associated to  $K_n$  converges to that of  $K$ , for the  $C^{r-3}$  topology. Then, if  $p$  is a point on  $T$  where  $g(K, K)(p) = \eta$ ,  $\eta = \pm 1$ , then for  $n$  sufficiently large,  $K_n(p)$  has type  $\eta$ ; fix  $K_n$  by setting  $g_n(K_n, K_n)(p) = \eta$ , such that  $K_n(p)$  converges to  $K(p)$ . The sequence  $K_n$  so obtained converges to  $K$  for the  $C^{r-4}$  topology.*

In the following,  $g \in \mathcal{L}_K(T)$  is a non-flat metric; we denote by  $U$  the open set in which  $\kappa$ , the sectional curvature associated to  $g$ , is a submersion. On this set,  $\kappa$  defines the foliation associated to  $K$ . The open set of  $T$  not containing the null orbits of  $K$  will be denoted by  $V$ .

**Fait 4.2.2.** *Consider a sequence of metrics  $g_n \in \mathcal{L}_K(T)$  converging to  $g$  for the  $C^r$  topology; then the sequence of foliations associated to  $K_n$  converges to that of  $K$  for the  $C^{r-3}$  topology, on every compact subset of  $U$ .*

*Démonstration.* Observe that the space of submersions over a compact variety  $M$  is an open set in the space of  $C^1$  functions over  $M$ . Let  $B$  be a compact subset of  $U$ ; provided we take  $n$  large enough,  $\kappa_n$  is also a submersion on  $B$  that defines the foliation associated to  $K_n$ .

In smooth local coordinates  $(s, t)$ , define

$$X_\kappa(s, t) := \left( -\frac{\partial \kappa}{\partial t}, \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right),$$

a vector field associated to  $\kappa$ . We have  $d\kappa(X_\kappa) = 0$ , so  $X_\kappa$  defines the foliation of  $K$ . It follows that if  $\kappa_n$  converges to  $\kappa$  for the  $C^{k-2}$  topology, the foliations they define converge for the  $C^{k-3}$  topology. Note that the curvature defines the foliation but not the Killing field; indeed, if  $X$  is such that  $d\kappa(X) = 0$ , then  $d\kappa(\phi X) = 0$  for any function  $\phi$  on the torus.  $\square$

**Fait 4.2.3.** *Denote by  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{F}_n$ ) the foliation associated to  $K$  (resp.  $K_n$ ). Suppose there exists  $q \in V$  such that  $K_n(q)$  converges to  $K(q)$ . Fix  $K$  and  $K_n$ , for  $n$  big enough, by setting  $g(K, K)(q) = g_n(K_n, K_n)(q) = \eta$ ,  $\eta = \pm 1$ . If  $\mathcal{F}_n$  converges to  $\mathcal{F}$  on  $V$  for the  $C^k$  topology, with  $k \leq r$ , then  $K_n$  converges to  $K$  on every compact subset of the connected component of  $q$  contained in  $V$ . The convergence holds for the  $C^k$  topology.*

*Démonstration.* Fix a Riemannian metric  $S$  on  $T$ , and let  $X$  (resp.  $X_n$ ) be a vector field on  $T$  tangent to  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{F}_n$ ), such that  $X(q)$  (resp.  $X_n(q)$ ) is  $\mathbf{R}^+$ -collinear to  $K(q)$  (resp.  $K_n(q)$ ), and  $S(X, X) = 1$  (resp.  $S(X_n, X_n) = 1$ ). Since the foliations are orientable, the oriented foliations still converge, so that  $X_n$  converges to  $X$  for the  $C^k$  topology. Next, we define  $\bar{K}$  (resp.  $\bar{K}_n$ ) to be the vector field on the connected component of  $V$  containing  $q$ ,  $\mathbf{R}^+$ -collinear to  $X$  (resp.  $X_n$ ) such that  $g(\bar{K}, \bar{K}) = \epsilon = g_n(\bar{K}_n, \bar{K}_n)$ , for  $n$  big enough. We have  $\bar{K}_n \xrightarrow{C^k} \bar{K}$ . Write  $K = h\bar{K}$  and  $K_n = h_n\bar{K}_n$ , where  $h, h_n > 0$ , for all  $n$ . This

yields  $h = \sqrt{\epsilon g(K, K)}$ , which implies that  $h$  (resp.  $h_n$ ) is invariant by the flow of  $K$  (resp.  $K_n$ ).

Now, write

$$g(\nabla_X K, X) = 0, \quad \forall X.$$

This yields the following equation on  $h$

$$(\nabla_X h)g(\bar{K}, X) + h g(\nabla_X \bar{K}, X) = 0, \quad \forall X. \quad (4.1)$$

Let  $c(s)$  be a curve containing  $q$  and transverse to  $K$ , and define a  $C^r$ -diffeomorphism  $\phi$  by setting  $\phi(s, t) = F(t, c(s))$ , where  $F$  is the flow of  $\bar{K}$ . There exists an open neighborhood of  $\mathbf{R}^2$  on which the flows of  $\bar{K}_n$  are all defined, for  $n$  big enough. So define in the same way a diffeomorphism  $\phi_n$  by  $\phi_n(s, t) = F_n(t, c(s))$ , where  $F_n$  is the flow of  $\bar{K}_n$ .

Since  $\bar{K}_n$  is  $C^k$  close to  $\bar{K}$ , for  $n$  large enough,  $\phi_n$  is  $C^k$  close to  $\phi$ . Set  $X = \frac{\partial \phi}{\partial s}$  and  $X_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial s}$  in equation (4.1) above; combining this with the fact that  $h$  is invariant by  $\bar{K}$ ,  $h \circ \phi$ , written in the  $(s, t)$  coordinates, satisfies the following differential equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h \circ \phi)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(h \circ \phi)}{\partial s} g(\bar{K}, X) \circ \phi + (h \circ \phi) g(\nabla_X \bar{K}, X) \circ \phi &= 0. \end{aligned}$$

This yields  $h \circ \phi(s, t) = h \circ \phi(s, 0)$  and  $h_n \circ \phi_n(s, t) = h_n \circ \phi_n(s, 0)$ , for all  $t$ . The continuity of solutions in the initial conditions and the coefficients of the equation permits now to assert that  $h_n \circ \phi_n(s, 0)$  is  $C^{k-1}$  close to  $h \circ \phi(s, 0)$ , hence  $h_n \circ \phi_n$  is  $C^{k-1}$  close to  $h \circ \phi$ , for  $n$  big enough. Since  $\phi_n \xrightarrow{C^k} \phi$ , one easily shows that actually  $h_n$  converges to  $h$  on a neighborhood of  $q$ , for the  $C^{k-1}$  topology, and then on any compact subset of the connected component of  $V$  containing  $q$ . Now, look at Equation (4.1), the  $C^{k-1}$  convergence of  $h_n$  and the  $C^k$  convergence of  $\bar{K}_n$  imply the  $C^{k-1}$  convergence of the first order derivatives of  $h_n$ , hence the  $C^k$  convergence of  $h_n$ .  $\square$

**Fait 4.2.4.** Let  $g_n$  be a sequence of metrics in  $\mathcal{L}_K(T)$  converging to  $g$  for the  $C^r$  topology;  $K$  (resp.  $K_n$ ) the Killing field of  $g$  (resp.  $g_n$ ) fixed as in the previous fact. Denote by  $R$  a maximal ribbon in  $\tilde{T}$ , and let  $L$  be the null vector field on it defined by  $g(L, K) = 1$ ; define  $L_n$  (for  $n$  big enough) to be the null vector field on  $R$  such that  $g_n(K_n, L_n) = 1$ . The  $C^k$  convergence of  $K_n$  to  $K$  on  $R$ , with  $k \leq r$ , leads to the  $C^k$  convergence of  $L_n$  to  $L$ .

*Démonstration.* Let  $\bar{L}$  (resp.  $\bar{L}_n$ ) be the null vector field on  $R$ ,  $\mathbf{R}^+$ -collinear to  $L$  (resp.  $L_n$ ), such that  $S(\bar{L}_n, \bar{L}_n) = S(\bar{L}, \bar{L}) = 1$ , where  $S$  is a Riemannian metric on  $T$ . By definition, the sequence of (oriented) foliations associated to  $L_n$  converges to that of  $L$ , so that  $\bar{L}_n \xrightarrow{C^r} \bar{L}$ . Write  $L = s\bar{L}$  and  $L_n = s_n\bar{L}_n$ ,  $s$  and  $s_n$  being non-vanishing functions. This yields

$$g(\bar{L}, K) = \frac{1}{s} \quad \text{and} \quad g_n(\bar{L}_n, K_n) = \frac{1}{s_n}.$$

It follows that if  $K$  is  $C^k$  close to  $K$ , then  $s_n$  is  $C^k$  close to  $s$ , which finishes the proof.  $\square$

**Fait 4.2.5.** *Let  $g_n$  be a sequence of metrics in  $\mathcal{L}_K(T)$  converging to  $g$  for the  $C^r$  topology; take  $q \in V \cap U$  and fix  $K$  and  $K_n$  as in Fact 4.2.3. Denote by  $R$  a maximal ribbon for the metric  $g$ , containing  $q$ , and define  $L$  and  $L_n$  on  $R$  as in the previous fact, then  $L_n$  is  $C^{r-3}$  close to  $L$  on any compact subset of  $R$ .*

*Démonstration.* Combining Fact 4.2.2 and Fact 4.2.3, we can say that  $L_n$  converges to  $L$  for the  $C^{r-3}$  topology on any compact subset of the connected component of  $q$  in  $V \cap U$ . Denote by  $B$  a set saturated by  $K$ , where this convergence holds. Now, in a local chart, the geodesics of  $g$  are the integral curves of the vector field of  $TT(T)$  defined by

$$Z = (Z^1, Z^2) = (y^k, - \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(x) y^i y^j).$$

The components of  $Z$  involve the first derivatives of  $g$ , so if  $g_n$  converges to  $g$  for the  $C^r$  topology, then  $Z_n$  converges to  $Z$  for the  $C^{r-1}$  topology. Therefore, there exists an open neighborhood  $\mathcal{U}$  of the zero section of  $\mathbf{R} \times T(T)$  on which the flows  $\Phi_n$  of  $Z_n$  are all defined, for all  $n$  but a finite number. Furthermore, the sequence  $\Phi_n$  converges to  $\Phi$  on any compact subset of  $\mathcal{U}$  (for the  $C^{r-1}$  topology). Let  $p \in R$ ; for an appropriate  $t_0 > 0$ ,  $\Phi_{t_0}$  is a diffeomorphism from an open set  $T\mathcal{V}$  of  $T(T)$ , where  $\mathcal{V}$  is an open set in  $B$ , into an open set  $T\mathcal{W}$ , where  $\mathcal{W}$  is a neighborhood of  $p$ . The sequence of diffeomorphisms  $\Phi_n(t_0, \cdot)$  converges to  $\Phi(t_0, \cdot)$ ; combining this with the fact that  $L_n$  tends to  $L$  on  $\mathcal{V}$ , we get  $\Phi_n(t_0, L_n) \xrightarrow{C^{r-3}} \Phi(t_0, L)$ . Now write  $\Phi_n(t_0, L_n) = L_n \circ \Phi_n$  and  $\Phi(t_0, L) = L \circ \Phi$ . It follows that  $L_n \circ \Phi_n \xrightarrow{C^{r-3}} L \circ \Phi$ , hence  $L_n \xrightarrow{C^{r-3}} L$  in the neighborhood of  $p$ .  $\square$

We go back to the proof of Proposition 4.2.1.

*Démonstration.* We start with the following observation.

**Observation :** Suppose  $g$  has non-constant curvature  $\kappa$ , and consider  $p \in T$  such that  $\alpha := \kappa(p)$  is a regular value of  $\kappa$  and  $g(K, K)(p) \neq 0$ ; set  $g(K, K)(p) = \eta, \eta = \pm 1$ , taking  $\lambda_0 K$  if necessary. The set  $\kappa^{-1}(\alpha)$  of isolated orbits of  $K$  contains the orbit of  $K$  containing  $p$ . Now let  $\{\psi^t\}$  be a flow of  $K$ . Since the stages  $\psi^t$  of the flow are isometries, the exponential map commutes with the flow; we write

$$\exp_{\psi^t(p)} \circ \psi_*^t = \psi^t \circ \exp_p, \quad (4.2)$$

This geometric ingredient allows, once an orbit of  $K$  is given, to get all the orbits of  $K$ . Indeed, fix  $q \in T$ ;  $p$  and  $q$  can be joined by a curve made of (broken) null geodesics, cutting each orbit of  $K$  transversally; call this curve  $c$ . Denote by  $\gamma(t)$  the integral curve of  $K$  containing  $p$ ; put  $\gamma(0) = p$ , and  $g(\dot{\gamma}(p), \dot{\gamma}(p)) = 1$ . Let  $L$  denote the null vector field along  $\gamma$ , tangent to the null foliation containing  $c$ , and such that  $\langle L, K \rangle = 1$ . Now (4.2) gives :

$$\psi^t(q) = \exp_{\gamma(t)}(sL_{\gamma(t)}),$$

where  $\exp_p(sL(p)) = q$ , defining the integral curve of  $K$  containing  $q$ .

According to Fact 4.2.2 and Fact 4.2.3,  $K_n \xrightarrow{C^{r-3}} K$  on every compact subset of the connected component of  $p$  in  $V \cap U$ . Denote by  $B$  an open set containing  $p$  where this

convergence holds. Furthermore, in every ribbon containing  $p$ , the sequence  $L_n$  of null vector fields defined in a ribbon by  $g_n(L_n, K_n) = 1$ , for  $n$  large enough, converges to the null vector field  $L$  defined in that ribbon by  $g(L, K) = 1$ .

Now, we denote by  $Exp$  (resp.  $Exp_n$ ) the exponential map of  $g$  (resp.  $g_n$ ). Let  $q$  be a point in a ribbon containing  $p$ , and let  $t_0 > 0$  such that  $q' = Exp(t_0 L(q)) \in B$ . There exists a neighborhood  $\mathcal{W}$  of the zero-section of a subset of  $T(T)$ , such that  $\mathcal{W} = \{tv, t \in [0, t_0], v \in \mathcal{U}\}$ , where  $\mathcal{U}$  is a neighborhood of  $L(q)$  in  $T(T)$ , in which the exponential maps of the metrics  $g_n$  are defined for all  $n$  but a finite number. Furthermore,  $Exp_n$  converges  $C^{k-1}$  to  $Exp$  on every compact subset of  $\mathcal{W}$ . Now, according to the previous observation, if  $z \in \pi(\mathcal{U})$ , where  $\pi : T(T) \rightarrow T$  is the natural projection, the integral curve of  $K$  (resp.  $K_n$ ) containing  $z$  is given by  $\psi^t$  (resp.  $\psi_n^t$ ), such that :

$$\psi^t(z) = Exp_{\psi^t(\phi(z))}(-t_0 L(\psi^t \circ \phi(z))), \quad \text{where } \phi(z) = Exp_z(t_0 L(z)) \in B.$$

Since  $L_n$  converges  $C^{r-3}$  to  $L$ , and the flows of  $K_n$  converge  $C^{r-3}$  to the flow of  $K$  in  $B$ , then  $\psi_n^t$  converges  $C^{r-3}$  to  $\psi^t$ , leading to the  $C^{r-4}$  convergence of  $K_n$  to  $K$  on  $\pi(\mathcal{U})$ . The result on the torus follows from the fact that any point on it can be brought to a point in  $B$  by a broken null geodesic everywhere transverse to  $K$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.6.** *Let  $(T, K)$  be a torus in  $\mathcal{L}_K^*(T)$ ; the number of bands, their signs and types are preserved in a neighborhood of the torus in  $\mathcal{L}_K(T)$ .*

*Démonstration.* For the number of bands and their signs, this is an easy consequence of the previous proposition. For the type preservation, recall that the null-leaves of  $K$  on a band of type II belong to different null-foliations, while on a band of type I, they belong to the same null-foliation. Since we cannot have a type III band in the torus, the result follows.  $\square$

**Corollaire 4.2.7.** *Let  $g \in \mathcal{L}_K(T)$  a non-flat metric with Killing field  $K$ , and let  $g_n \in \mathcal{L}_K(T)$  be a sequence of metrics, with Killing field  $K_n$ , converging to  $g$  for the  $C^r$  topology,  $r \geq 4$ . Let  $R$  be a maximal ribbon in  $\tilde{T}$  for the metric  $g$ , and fix  $p \in R$ . Define  $\phi : R \rightarrow I \times \mathbf{R}$ ,  $\phi(q) = (x(q), y(q))$ , with  $\phi(p) = (0, 0)$ ; define in the same way  $\phi_n$  on  $R$  satisfying  $\phi_n(p) = (0, 0)$ . Then,  $\phi_n$  converges  $C^{r-4}$  to  $\phi$  on every compact subset of  $R$ .*

*Démonstration.* Proposition 4.2.1 implies the  $C^{r-4}$  convergence of the Killing fields, hence that of the transverse coordinates, using Lemma 1.2.4. Now, define a volume form  $\nu$  on  $R$  by setting  $\nu(K, L) = 1$ , where  $L$  is the null vector field on  $R$  satisfying  $g(L, K) = 1$ . The coordinate  $y \in C^\infty(R, \mathbf{R})$  can be defined by  $i_{\tilde{L}}\nu = dy$  and  $y(p) = 0$ . In the same way, consider for  $n$  sufficiently large a volume form  $\nu_n$  on  $R$  defined by  $\nu_n(K_n, L_n) = 1$ , where  $L_n$  is the null vector field on  $R$  satisfying  $g_n(L_n, K_n) = 1$ . The coordinate  $y_n \in C^\infty(R, \mathbf{R})$  is given by  $i_{L_n}\nu_n = dy_n$ ,  $y_n(p) = 0$ . The convergence of  $\phi_n$  to  $\phi$  follows from Proposition 4.2.1 and Fact 4.2.4.  $\square$

**Remarque 4.2.8.** *The application  $\phi$  (resp.  $\phi_n$ ) defined above is a diffeomorphism on  $R$  (resp. on every saturated subset of  $R$ ). Take an open set  $J$  of  $I$ , contained in  $I_n$  for all  $n$  but a finite number. The pullback of the metrics by these applications read  $(\phi^{-1})_*g = 2dx dy + f(x)dy^2$  and  $(\phi_n^{-1})_*g_n = 2dx dy + f_n(x)dy^2$ ,  $(x, y) \in I \times \mathbf{R}$ , whose extensions to  $\mathbf{R}^2$  that give the maximal ribbons in  $E_f^u$  and  $E_{f_n}^u$  respectively, are proved to be convergent in Lemma 1.2.4.*

**Lemme 4.2.9.** *Let  $(U, K)$ ,  $I = I \times \mathbf{R}$  be a Lorentzian domino where the unique null orbit of  $K$  (represented by  $x = 0$ ) is incomplete. Denote by  $g$  the metric on  $U$  and let  $(g_n, K_n)$  be a sequence of metrics on  $U$  such that  $(g_n, K_n) \xrightarrow{C^r} (g, K)$ ,  $r \geq 2$ . Then, there exists a neighborhood  $J$  of 0 in which the coordinate neighborhoods for  $g_n$  given by Equation (1.2) converges  $C^{r-2}$  to that of  $g$ .*

*Démonstration.* The neighborhood  $J$  is given by Lemma 1.2.5, and the convergence follows from the previous lemma, and Equations (5) and (8), [3], that define these coordinates.  $\square$

## 4.2.2 Une fonction continue contrôlant les points conjugués

Define

$$\Omega = \{(g, p) \in \mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(K, K)(p) \neq 0 \text{ and } \nabla_K K(p) \neq 0\}.$$

For  $g \in \mathcal{L}_K^*(T)$ , the points  $p \in T$  such that  $(g, p) \in \Omega$  are the points of  $T$  which are neither on a null orbit of  $K$  nor on a critical orbit. Take  $(g, p) \in \Omega$  and consider the geodesic  $\gamma_p$  in  $T$  tangent to  $K$  at  $p$ . Set  $t = 0$  at  $p$  and define  $c(t_0) + c(t_1)$  as in the previous section. Define a function  $\mathcal{Z}$  on the open set  $\Omega$  as follows :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : \Omega &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathcal{Z}(g, p) &= \frac{c(t_0) + c(t_1)}{s(t_0)} \end{aligned}$$

where  $t_0, t_1$  and  $c$  are exactly as in the previous section.

**Lemme 4.2.10.** *A metric  $g$  in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  is without conjugate points if and only if  $\mathcal{Z}(g, p) \geq 0$ ,  $\forall p \in T$  such that  $(g, p) \in \Omega$ .*

*Démonstration.* This follows from Lemma 3.3.2 and Proposition 3.3.13.  $\square$

**Proposition 4.2.11.** *If the space of Lorentzian metrics on  $T$  is equipped with the  $C^2$  topology, then  $\mathcal{Z}$  is continuous on  $\Omega$ .*

*Démonstration.* Let  $(g_n, p_n) \rightarrow (g, p)$  in  $\Omega$ , where  $g_n$  converges to  $g$  for the  $C^2$  topology. In  $\mathbf{R}^2$  equipped with the metric  $2dx dy + f(x) dy^2$  (resp.  $2dx dy + f_n(x) dy^2$ ), let  $\gamma$  (resp.  $\gamma_n$ ) be the geodesic tangent to  $\phi_* K$  (resp.  $\phi_{n*} K_n$ ) at  $\phi(p)$  (resp.  $\phi_n(p_n)$ ), where  $\phi, \phi_n, n \in \mathbf{N}$ , are the local charts defined in Corollary 4.2.7, satisfying  $\phi(p) = \phi_n(p) = 0$ . The geodesic sequence  $\gamma_n$  converges uniformly to  $\gamma$  on any compact set of  $\mathbf{R}^2$ .

Let us rewrite the Jacobi equations along  $\gamma_n$  and  $\gamma$  :

$$u''(t) + \epsilon \kappa_n(t) u(t) = 0 \tag{4.3}$$

$$u''(t) + \epsilon \kappa(t) u(t) = 0 \tag{4.4}$$

$\kappa_n$  converges uniformly to  $\kappa$  on any compact set. The pairs of solutions  $(s, c)$  and  $(s_n, c_n)$  are given by the same initial conditions so  $s_n$  and  $c_n$  converge uniformly to  $s$  and  $c$  respectively, on any compact set containing  $\gamma$ .

Lemma 3.3.4 states that  $\gamma$  restricted to the subset of  $\mathbf{R}^2$  contained in  $\tilde{T}$  lies in a domino. This holds also for  $\gamma_n$ , for  $n$  large enough. Denote by  $x_0$  (resp.  $x_0^n$ ) the zero of  $f$  (resp.  $f_n$ ) in it, and set  $x = z_0$  (resp.  $x = z_0^n$ ) at  $p$  (resp.  $p_n$ ). We have by use of Fact 1.2.6 that  $x_0^n$  converges to  $x_0$ . Write

$$t_0 = \int_{z_0}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} dx.$$

This yields  $t_0^n \rightarrow t_0$ , hence the convergence of  $c_n(t_0^n)$  to  $c(t_0)$ . To show that  $c_n(t_1^n)$  tends to  $c(t_1)$ , we also show that  $t_1^n$  tends to  $t_1$ . Since a geodesic crosses a type I band between  $t_0$  and  $t_1$ , we can write

$$t_1 = t_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} dx.$$

This yields  $t_1^n \rightarrow t_1$  in the same way, finishing the proof.  $\square$

Now assume that  $T \in S\mathcal{L}_K^*(T)$ , i.e. the function  $f$  induced by the norm of  $K$  satisfies the property

$$f'(x_n) + f'(x_{n+1}) = 0, \forall n \in \mathbf{Z},$$

where  $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  is the sequence of zeros of  $f$ , taken in an increasing order. Then, using  $cs' - c's = 1$ , one can check that the  $\mathcal{Z}$  function can be written in the following way :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : \Omega &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathcal{Z}(g, p) &= \frac{c'(t_0) - c'(t_1)}{s'(t_0)} \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.12.** *The functions  $\mathcal{Z}$  can be extended to the set*

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = &\{(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(K, K)(p) \geq 0 \text{ and } \nabla_K K(p) \neq 0\} \\ &\cup \{(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(K, K)(p) \leq 0 \text{ and } \nabla_K K(p) \neq 0\}, \end{aligned}$$

into a continuous function.

*Démonstration.* Take  $(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T$  such that  $g(K, K)(p) = 0$ . The null orbit of  $K$  containing  $p$  splits the domino containing it into two connected components (interior of bands), one timelike band and one spacelike band. Take  $(p_n)_n$  a sequence of points in the torus converging to  $p$ , and contained in the timelike band. The sequence  $(\gamma_n)_n$  of timelike geodesics tangent to  $K$  at  $p_n$ ,  $\forall n$ , converges to the null orbit of  $K$  containing  $p$ . The function  $\mathcal{Z}(g)$  being constant along the leaves of the Killing field for each metric  $g$ , we don't change the behavior of  $\mathcal{Z}$  if we move the  $\gamma_n$ 's by the flow of  $K$  in such a way that the sequence converges to a timelike geodesic  $\gamma_\infty$  orthogonal to  $K$  and crossing the spacelike neighboring band. We can do this by letting  $p_n$  go to the saddle point of the null-orbit of  $K$  containing  $p$ , along a leaf orthogonal to  $K$  contained in  $B$ . This way, we see that  $\mathcal{Z}(g, p_n)$  converges to  $-c'_\infty(2\omega)$ , where  $s_\infty$  and  $c_\infty$  are the solutions of the Jacobi equation on  $\gamma_\infty$ , with initial conditions at the saddle point. This limit does not depend on the choice of  $\gamma_\infty$ ; denote it by  $\mathcal{Z}(g, p)^-$ . In the same way, if  $\gamma_n$ 's are spacelike, we get another limit using this time a spacelike geodesic orthogonal to  $K$  and passing through the same saddle point. Now, fix a metric in  $S\mathcal{L}_K^*(T)$  and denote by  $(B_i)_{i \in I}$  the bands of



the torus for the metric  $g$ ; the boundary of a band  $B_i$  is made of two null orbits of  $K$ , call them  $\partial_1 B$  and  $\partial_2 B$ . Define for  $p \in \Pi_{i \in I} B_i$ :

$$\tilde{\mathcal{Z}}(g, p) = \begin{cases} \mathcal{Z}(g, p) & \text{if } (g, p) \in \mathring{B}_i, \\ \mathcal{Z}(g, p)_1^\epsilon & \text{if } (g, p) \in \partial_1 B, \\ \mathcal{Z}(g, p)_2^\epsilon & \text{if } (g, p) \in \partial_2 B, \end{cases}$$

for all  $i \in I$ , where  $\epsilon = \pm 1$ , depending on the type of the band.

This gives a well defined function  $\tilde{\mathcal{Z}}$  on the set

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = & \{(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(K, K)(p) \geq 0 \text{ and } \nabla_K K(p) \neq 0\} \\ & \cup \{(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(K, K)(p) \leq 0 \text{ and } \nabla_K K(p) \neq 0\}, \end{aligned}$$

Now, to prove that  $\tilde{\mathcal{Z}}$  is continuous, take  $(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T$  such that  $g(K, K)(p) = 0$ , and consider a sequence of metrics  $g_n \in S\mathcal{L}_K^*(T)$  converging to  $g$ . Lemma 4.2.9 and Lemma 1.2.5 allow us to consider a coordinate neighborhood centered in 0 and given by Equation (1.2), in which the saddle points of  $g_n$  and that of  $g$  are represented by the origin. Take a sequence  $\gamma_n$  of timelike geodesics converging to the null orbit of  $K$  containing  $p$ . Denote by  $p_n$  the points where  $\gamma_n$  is tangent to  $K_n$ . One can find a sequence of points  $q_n$  such that  $\tilde{\mathcal{Z}}(g_n, q_n) = \tilde{\mathcal{Z}}(g_n, p_n)$ , for all  $n \in \mathbb{N}$ , and the sequence of geodesics  $\sigma_n$  tangent to  $K_n$  at  $q_n$  converges to a timelike geodesic  $\sigma_\infty$  orthogonal to  $K$ . We can achieve this in the following way: there exists a sequence  $(t_n)_n$  such that the sequence of points  $F^{t_n}(p_n)$ , where  $F^t$  is the flow of  $K$ , converges to the origin. We use the convergence of the flows and define  $q_n := F_n^{t_n}(p_n)$ , where  $F_n^t$  is the flow of  $K_n$  (we choose the points  $q_n$  to vary on a leaf orthogonal to  $K$ ). This way, we obtain  $c'_n(t_0^n) \rightarrow c'_\infty(0) = 0$  and  $s'_n(t_0^n) \rightarrow s'_\infty(0) = 1$ , where  $s_\infty$  and  $c_\infty$  are the solutions of the Jacobi equation on  $\gamma_\infty$ , with initial conditions at the origin.

Now, we want to prove that  $c'_n(t_1^n)$  converges to  $c'_\infty(2\omega_\infty)$ . Take an interval  $I$  in which  $\sigma_n$  converges to  $\sigma_\infty$ . Take  $\tau_0 \in I$ ;  $\sigma_n$  and  $\sigma_\infty$  may be seen as solutions of the differential equation which gives locally the geodesics of  $g_n$  and  $g$ , with initial conditions given by  $\sigma'_n(\tau_0)$  and  $\sigma'_\infty(\tau_0)$  respectively. Let us consider a coordinate neighborhood  $U$ , given by Lemma 1.2.5, containing the saddle point that belongs to the null orbit of the type I neighboring band containing  $\sigma'_\infty(\tau_0)$ . Choosing  $\tau_0$  so that  $\sigma_\infty(\tau_0), \sigma_n(\tau_0) \in U$  for  $n$  large enough, we can assert that  $\sigma_n$  (extended to  $U$ ) converges to  $\sigma_\infty$  in  $U$ . The result follows.  $\square$

From now on, the function  $\tilde{\mathcal{Z}}$  will be simply denoted by  $\mathcal{Z}$ .

### 4.2.3 Digression : Equations de Jacobi dont toutes les solutions sont périodiques

In what follows,  $g$  belongs to the family given in Theorem 3.3.19.

**Lemme 4.2.13.** *If a metric  $g \in \mathcal{L}_K(T)$  belongs to the family given in Theorem 3.3.19, then  $\mathcal{Z}$  vanishes on  $(g, p), p \in T$ , if and only if the Jacobi equation corresponding to  $\gamma_g$ , the  $g$ -geodesic tangent to  $K$  at  $p$ , has only periodic solutions.*

*Démonstration.* For such a metric,  $\mathcal{Z}$  is defined for  $p \in T$  such that  $\gamma_g$  is an invariant geodesic, and the additional isometries of  $g$  given by condition (iv) in Theorem 3.3.19 imply that  $\kappa(t)$  is  $2\omega$  periodic and that  $\beta$  is  $2\omega$  anti-periodic. In this case, formula (3.4) in Lemma 3.2.5 holds, so that  $\mathcal{Z}$  vanishes if and only if  $c(\omega) = 0$ , which is equivalent to saying that  $c$  is  $2\omega$  anti-periodic (hence  $4\omega$  periodic).  $\square$

**Remarque 4.2.14.** *An equation*

$$u'' + r(t)u = 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

where the coefficient  $r(t)$  is  $T$ -periodic is called a Hill equation. When all the solutions are assumed to be  $T$ -antiperiodic, with one zero on  $[0, T]$ , the following inequality holds (see [6], Appendix B p. 230)

$$T \int_0^T r(t)dt \leq \pi^2,$$

with equality only for constant  $r(t)$ .

Let  $p, r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , where  $p(x) > 0$ , and consider the equation

$$(py')' + \lambda ry = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.5)$$

with boundary conditions

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (4.6)$$

According to [26, p. 288], there are two infinite sequences of parameter values  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$ ,  $0 \geq \lambda_{-1} \geq \lambda_{-2} \dots$ , each one of which has  $+\infty$  and  $-\infty$  for its only point of accumulation, and for each parameter  $\lambda_m$  (resp.  $\lambda_{-m}$ ), a solution  $y_m$  (resp.  $y_{-m}$ ) satisfying (4.6) exists. The number of zeros of  $y_m$  in  $[a, b]$  is  $m + 1$ .

Let  $\gamma$  be an invariant geodesic for the metric  $g$ , and consider the differential system

$$\begin{cases} u'' + \lambda \epsilon \kappa u = 0, & t \in [0, 2\omega] \\ u(0) = u(2\omega) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

where  $\kappa$ , the sectional curvature along  $\gamma_g$ , is (see paragraph 3.3.3) symmetric with respect to  $t = 0$  and  $t = \omega$ . Denote by  $\lambda_1$  the least positive eigenvalue of the differential system (4.7), which exists by the statement above, and let  $y_1$  be the corresponding eigenfunction. Since  $\kappa$  is symmetric with respect to  $t = \omega$ , an easy computation gives either  $y_1'(\omega) = 0$  or  $y_1(\omega) = 0$ . Furthermore,  $y_1$  does not vanish on  $]0, 2\omega[$ , so actually  $y_1'(\omega) = 0$ . It follows that  $y_1$  is a solution of the new system

$$\begin{cases} u'' + \lambda \epsilon \kappa u = 0, & t \in [0, \omega] \\ u(0) = u'(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Now, if  $\lambda$  is an eigenvalue of the system (4.8), with corresponding eigenfunction  $u$  defined on  $[0, \omega]$ , then, by reflecting  $u$  about the line  $t = \omega$ , one gets a solution of the differential system (4.7), for  $\kappa$  is symmetric with respect to  $\omega$ .

This proves that  $\lambda_1$  is also the least positive eigenvalue of the differential system (4.8).

The following fact follows from the proof of Lemma 3, [5].



**Fait 4.2.15.** *Suppose that the coefficient  $r$  in Equation (4.5) is symmetric with respect to  $t_0 = \frac{a+b}{2}$ . If there exists a solution  $y_0$  of  $(py')' + ry = 0$  satisfying  $y_0(a) = y_0(b) = 0$ , symmetric with respect to  $t_0$ , with  $y_0$  not vanishing on  $]0, 2\omega[$ , then the least positive eigenvalue of the system (4.5)-(4.6) is  $\lambda_1 = 1$ .*

**Lemme 4.2.16.** *When  $g$  belongs to the family given in Theorem 3.3.19, the following inequality holds*

$$\int_0^{2\omega} \epsilon\kappa(t)dt \leq \frac{\pi^2}{2\omega}.$$

for all invariant geodesics.

*Démonstration.* Let  $\lambda_1$  be the least positive eigenvalue of the system

$$\begin{cases} u'' + \lambda\epsilon\kappa u = 0, & t \in I = [0, \omega] \\ u(0) = u'(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

We have the following inequality from Theorem 6, [7]

$$\lambda_1 \leq \frac{(\pi/2)^2}{d^2\omega^2}, \quad \text{where } d^2 = \min_{t \in I} \frac{\int_t^\omega \epsilon\kappa(t)dt}{\omega - t}.$$

The function  $\beta$  is a solution of the Jacobi equation that satisfies

$$\beta(0) = \beta'(\omega) = 0, \quad \beta' > 0 \text{ on } [0, \omega[.$$

This implies using Fact 4.2.15 above that the least positive eigenvalue  $\lambda_1$  of the system (4.9) is  $\lambda_1 = 1$ . Now set

$$h(t) = \frac{1}{\omega - t} \int_t^\omega \epsilon\kappa(t)dt, \quad t \in I$$

We have

$$h'(t) = \frac{1}{\omega - t} \left[ \frac{1}{\omega - t} \int_t^\omega \epsilon\kappa(t)dt - \epsilon\kappa(t) \right].$$

Using the mean value theorem, we show the existence of  $\tau \in ]t, \omega[$ , such that  $\frac{1}{\omega - t} \int_t^\omega \epsilon\kappa(t)dt = \epsilon\kappa(\tau)$ . This gives

$$h'(t) = \frac{1}{\omega - t} (\epsilon\kappa(\tau) - \epsilon\kappa(t)), \quad \tau \in ]t, \omega[.$$

Condition (iii) in Theorem 3.3.19 implies that  $\epsilon\kappa(t)$  is an increasing function on  $[0, \omega]$ , so that

$$\min_{t \in I} \frac{\int_t^\omega \epsilon\kappa(t)dt}{\omega - t} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \epsilon\kappa(t)dt.$$

□

**Lemme 4.2.17.** *Consider a metric in the family given in Theorem 3.3.19; suppose that the Jacobi equation of a geodesic  $\gamma$  has only periodic solutions, then*

$$\sup \left\{ \frac{1}{\omega} \int_\omega^{2\omega} \epsilon\kappa(t)dt, -\epsilon\kappa(0) \right\} \geq \frac{\pi^2}{4\omega^2}. \quad (4.10)$$

It follows that either  $-\epsilon\kappa(0) \geq \frac{\pi^2}{4\omega^2}$  or  $\kappa$  is constant along  $\gamma$ .

*Démonstration.* Let  $\lambda_1$  be the least positive eigenvalue of the system

$$\begin{cases} u'' + \lambda \epsilon \kappa u = 0, & t \in J = [0, \omega] \\ u(\omega) = u'(2\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

The following inequality follows from Theorem 5, [7] :

$$\lambda_1 \geq \frac{(\pi/2)^2}{D^2 \omega^2}, \quad \text{where} \quad \max_{t \in I} \frac{|\int_t^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt|}{2\omega - t} = D^2.$$

Suppose that the Jacobi equation has only periodic solutions, i.e.  $c(\omega) = 0$ . In this case, we have  $c(\omega) = c(3\omega) = 0$ , and  $c(4\omega - t) = c(t)$ . Thus,  $c$  and the coefficient  $\kappa$  are symmetric with respect to  $t = 2\omega$ , with  $c$  not vanishing on  $] \omega, 3\omega[$ . It follows that  $\lambda_1 = 1$ , by use of Fact 4.2.15 again.

Now set as in the proof of the previous lemma

$$h(t) = \frac{1}{2\omega - t} \left| \int_t^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt \right|, \quad t \in I$$

Let  $b \in I$  the smallest real such that  $\int_b^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt = 0$ . Doing the same computation as before, we show the existence of  $\tau \in ]t, 2\omega[$  such that

$$h'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega - t} (\epsilon \kappa(\tau) - \epsilon \kappa(t)), & t \in [\omega, b] \\ \frac{1}{2\omega - t} (-\epsilon \kappa(\tau) + \epsilon \kappa(t)), & t \in [b, 2\omega] \end{cases}$$

Condition (iii) in Theorem 3.3.19 implies that  $\epsilon \kappa(t)$  is a decreasing function on  $[\omega, 2\omega]$ , so that

$$\max_{t \in I} \frac{|\int_t^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt|}{2\omega - t} = \sup \left\{ \frac{1}{\omega} \int_{\omega}^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt, -\epsilon \kappa(0) \right\}.$$

The above inequality reads

$$\sup \left\{ \frac{1}{\omega} \int_{\omega}^{2\omega} \epsilon \kappa(t) dt, -\epsilon \kappa(0) \right\} \geq \frac{\pi^2}{4\omega^2}.$$

The last assertion is an easy consequence of Lemma 4.2.16 and Remark 4.2.14.  $\square$

**Corollaire 4.2.18.** *Suppose that the curvature has a constant sign on an invariant geodesic  $\gamma$  without being constant, then the Jacobi equation admits a non-periodic solution.*

*Démonstration.* A geodesic of type  $\epsilon$  cuts the critical orbit of  $K$  of type  $-\epsilon$ , corresponding to  $t = \omega$ , on which the curvature is either zero or has sign  $\epsilon$ ; since  $\kappa$  doesn't change sign on  $\gamma$ ,  $-\epsilon \kappa(0) \leq 0$ . Therefore, if the Jacobi equation has only periodic solutions,  $\kappa$  is constant on  $\gamma$  by use of the previous lemma.  $\square$

**Lemme 4.2.19.** *Suppose that the curvature vanishes exactly twice on the smallest period of  $f$ , and let  $\gamma$  be a geodesic on which  $\kappa(t) := \kappa \circ \gamma(t)$  changes sign. If the Jacobi equation associated to  $\gamma$  admits only periodic solutions, then*

$$(\omega - \tau)^2 \epsilon \kappa(\omega) \geq \frac{\pi^2}{4}, \quad (4.12)$$

where  $0 < \tau < \omega$  is the smallest positive real such that  $\kappa(\tau) = 0$  on  $\gamma$ .

*Démonstration.* By assumption,  $c(\omega) = 0$ . Let  $b > 0$  be the smallest positive real such that  $c'(b) = 0$ . If we assume  $\kappa$  to vanish twice in the period of  $f$ , then the zeros of  $\kappa$  are on both sides of a critical orbit of  $K$  corresponding to an extremum of  $f$ . Indeed, since  $\kappa(t)$  is symmetric with respect to  $t = 0$  and  $t = \omega$ , either both zeros of it are in the same band or both of them are on the critical orbits of  $K$  where  $f'$  changes sign. The latter implies that  $\kappa$  is everywhere positive or everywhere negative on the torus, so it cannot actually happen, unless the torus is flat. In addition,  $\kappa$  changes sign while vanishing. It follows that  $\kappa$  has sign  $-\epsilon$  on  $[0, \tau[$  and  $\epsilon$  on  $] \tau, \omega]$ , so that  $c$  is convex on  $[0, \tau]$  and concave on  $[\tau, \omega]$ , hence  $\tau < b < \omega$ . The curvature does not vanish on  $[b, \omega]$ ; on this interval it is easy to check that the differential equation

$$\left(\frac{1}{\kappa}y'\right)' + \epsilon y = 0$$

is satisfied by  $u'$ , where  $u$  is a solution of the Jacobi equation. Let  $\lambda_1$  be the least positive eigenvalue of the system

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\kappa}y'\right)' + \lambda \epsilon y &= 0, \quad t \in I = [b, \omega], \\ y(b) &= y'(\omega) = 0. \end{aligned}$$

The assumption on  $c$  leads to  $c''(\omega) = 0$ , so we have  $c''(\omega) = c'(b) = 0$ , and  $c''$  does not vanish on  $[b, \omega[$ ; it follows that  $\lambda_1 = 1$ , as in the proof of the previous lemma.

We have (see [7, Theorem 5])

$$\max_{t \in I} \frac{\omega - t}{\int_t^\omega \epsilon \kappa(t) dt} \geq \frac{\pi^2}{4(\int_b^\omega \epsilon \kappa(t) dt)^2}. \quad (4.13)$$

Now set

$$h(t) = \frac{\omega - t}{\int_t^\omega \epsilon \kappa(t) dt}, \quad t \in [b, \omega],$$

The same argument as in the previous lemmas shows the existence of  $\theta \in ]t, \omega[$ , such that

$$h'(t) = (\omega - t)(-\epsilon \kappa(\theta) + \epsilon \kappa(t)) \frac{1}{(\int_t^\omega \epsilon \kappa(t) dt)^2},$$

so that  $h$  is a decreasing function on  $[b, \omega]$ , and (4.13) reads

$$(\omega - b) \int_b^\omega \epsilon \kappa(t) dt \geq \frac{\pi^2}{4}.$$

Combining this with the fact that  $\epsilon \kappa(t)$  reaches its maximum at  $t = \omega$ , and that  $b > \tau$ , we get the desired inequality :

$$(\omega - \tau)^2 \epsilon \kappa(\omega) \geq \frac{\pi^2}{4}.$$

□

### 4.2.4 Application : Géodésiques invariantes avec un champ de Jacobi non périodique

In what follows,  $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  belongs to the family given in Theorem 3.3.19.

**Proposition 4.2.20.** *Suppose  $\kappa$  vanishes twice on the smallest period of  $f$ . If there exists an invariant geodesic  $\gamma_0$  on which  $\kappa$  changes sign, such that*

$$-\epsilon f''(x_0) \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(x)}} \right)^2 < 2\pi^2, \quad (4.14)$$

where  $x_0, x_1$  are the coordinates of two consecutive points where  $\gamma_0$  is tangent to  $K$ , and  $M_\epsilon = \sup \epsilon f(x)$ , then, either  $\kappa$  is constant on the band where  $\epsilon f$  is negative, or for all the geodesics such that  $C^2 \leq C_0^2 = \epsilon f(x_0)$ , where  $C_0$  is the Clairaut constant of  $\gamma_0$ , the Jacobi equation admits a non-periodic solution.

*Démonstration.* Let  $z_0 = 0$  and  $d$  be two consecutive zeros of  $f$ , such that  $z_0$  and  $d$  border the part of  $f$  of sign  $-\epsilon$ . Denote by  $x_{cr}^\epsilon$  the coordinate of a zero of  $f'$ , such that either  $x_0 \in [x_{cr}^\epsilon, 0]$  or  $x_0 \in [d, x_{cr}^\epsilon]$ ; for simplicity, assume  $x_0 \in [x_{cr}^\epsilon, 0]$ . We have  $x_1 = d - x_0$ . Define

$$h(x) = -\epsilon \frac{f''(x)}{2} - \frac{\pi^2}{\left( \int_x^{d-x} \frac{dt}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(t)}} \right)^2},$$

where  $x \in J = [x_0, 0]$ ;  $h$  is a derivable function since for  $x \in J$ ,  $M_\epsilon - \epsilon f(t) > 0$  for every  $t \in [x, d - x]$ .

A simple computation gives

$$h'(x) = -\epsilon \frac{f^{(3)}(x)}{2} - \frac{2\pi^2}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(x)} \left( \int_x^{d-x} \frac{dt}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(t)}} \right)^3}.$$

Multiply both sides by  $f'(x)$ ; this gives

$$f'(x)h'(x) = -\epsilon \frac{f^{(3)}(x)f'(x)}{2} - D^2 f'(x),$$

where  $D^2 = \frac{2\pi^2}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(x)} \left( \int_x^{d-x} \frac{dt}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(t)}} \right)^3}$ .

By assumption, we have  $f' f^{(3)} \leq 0$ ; furthermore,  $f'$  has sign  $-\epsilon$  on  $J$ ; combining these two facts, we deduce that  $h$  is a decreasing function on  $J$ . Now, for  $C^2 \leq C_0^2$  i.e.  $x \in [x_0, 0]$ , we have

$$h(x_0) \geq -\epsilon \frac{f''(x)}{2} - \frac{\pi^2}{\left( \int_x^{d-x} \frac{dt}{\sqrt{C_0^2 - \epsilon f(t)}} \right)^2},$$

so if we suppose that (4.14) is true, then

$$-\epsilon \frac{f''(x)}{2} - \frac{\pi^2}{\left( \int_x^{d-x} \frac{dt}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(t)}} \right)^2} < 0, \quad \forall x \in J.$$

Now, recall that  $\kappa(t) = f''(x(\gamma(t)))/2$ , and  $t(d-x) - t(x) = \int_x^{d-x} \frac{1}{\sqrt{C^2 - \epsilon f(x)}} dx$ . So the latter inequality is equivalent to  $-\epsilon\kappa(0) < \frac{\pi^2}{4\omega^2}$  on  $\gamma_C$ , which ends the proof by Lemma 4.2.17.  $\square$

**Proposition 4.2.21.** *Suppose  $\kappa$  vanishes twice on the smallest period of  $f$ . Assume there exists an invariant geodesic  $\gamma_0$  on which  $\kappa$  changes sign, such that*

$$\epsilon f''(x_{cr}^{-\epsilon}) \left( \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dx}{\sqrt{\epsilon f(x_0) - \epsilon f(x)}} \right)^2 < 2\pi^2, \quad (4.15)$$

where

- i)  $x_{cr}^{-\epsilon}$  is a critical point of  $f$  corresponding to the critical orbit of  $K$  of type  $-\epsilon$ ;
- ii)  $\zeta_0 < x_{cr}^{-\epsilon} < \zeta_1$  are the coordinates of two consecutive points where  $f''$  vanishes, from both sides of  $x_{cr}^{-\epsilon}$ ;
- iii)  $x_0$  the point where  $\gamma_0$  is tangent to  $K$ .

Then for all the geodesics with  $C_0^2 = \epsilon f(x_0) \leq C^2 < M_\epsilon$ , where  $C_0$  is the Clairaut constant of  $\gamma_0$ , the Jacobi equation admits a non-periodic solution.

*Démonstration.* Inequality (4.15) implies that  $(\omega_0 - \tau_0)^2 \epsilon \kappa(\omega_0) < \frac{\pi^2}{4}$  on  $\gamma_0$ , where  $\tau_0$  is the same as in Lemma 4.2.19, hence the Jacobi equation on  $\gamma_0$  admits a non-periodic solution, by use of Lemma 4.2.19.

This conclusion holds for  $C^2 \geq C_0^2$ , for  $(\omega_C - \tau_C)$  and  $\epsilon \kappa(\omega_C)$  (we put  $C$  in index to say that it depends on the geodesic  $\gamma_C$ ) are decreasing functions of  $C$ .  $\square$

### 4.2.5 Stabilité par déformation

**Lemme 4.2.22.** *Let  $g \in \mathcal{L}_K^*(T)$ . Assume  $\kappa$  vanishes  $n$  times on the smallest period of  $f$ , hence twice between any two critical orbits of the Killing field of same type ( $n$  is the number of zeros of  $f$  in a period), and that these zeros are not on the extremums of  $f$ . Assume in addition that the zeros of  $\kappa$  are simple zeros. Let  $\gamma_\infty$  be a critical orbit of  $K$  corresponding to an extremum of  $f$ . Then there exists a neighborhood  $V$  of the set  $\{(g, \gamma_\infty(t), t \in \mathbf{R})\}$  in  $\mathcal{L}_K(T) \times T$ , where  $\mathcal{L}_K(T)$  is equipped with the  $C^\infty$  topology, such that  $\mathcal{Z} > 0$  on  $V \cap \Omega$ .*

*Démonstration.* This amounts to saying that the geodesics near  $\gamma_\infty$ , for metrics close enough to  $g$ , where  $g$  is the metric on the torus, are without conjugate points. Call  $B$  the band containing  $\gamma_\infty$ , and fix  $p$  a point on  $\gamma_\infty$ ; it is sufficient to prove that there exists a neighborhood of  $(g, p)$  in which  $\mathcal{Z}$  is positive; the conclusion will follow from the compactness of  $\gamma_\infty$ . So let  $(g_n, p_n)$  be a sequence in  $\Omega$  converging to  $(g, p)$ . For all  $n$ , denote by  $\gamma_n$  the  $g_n$ -geodesic tangent to  $K_n$  at  $p_n$ . Since  $(g_n, p_n) \in \Omega$ , we have  $\forall n, C_n^2 < \sup_B \epsilon g_n(K_n, K_n)$ . Choose  $p$  to be the origin on  $T$  and denote by  $x$  (resp.  $x_n$ ) the transverse coordinate associated to  $g$  (resp.  $g_n$ ), with the fixed origin. We can suppose that the points  $p_n$  are all on the same side of the critical orbit of  $K_n$  close to  $\gamma_\infty$ . Since the zeros of  $\kappa$  are simple zeros, the curvature vanishes twice between two critical orbits of  $K_n$  of same type for metrics sufficiently close to  $g$ . Set  $x = x_0, x = x_1$  (resp.  $x_0^n, x_1^n$ ) the smallest positive reals such that  $g(K, K)$  (resp.  $g_n(K_n, K_n)$ ) vanishes, and  $x = \zeta_0, x = \zeta_1$  (resp.

$\zeta_0^n, \zeta_1^n$  the smallest positive reals such that  $\kappa$  (resp.  $\kappa_n$ ) vanishes. When  $C^2$  varies in  $I_\lambda = [\sup(\epsilon f(\zeta_0), \epsilon f(\zeta_1)) + \lambda, \sup_B \epsilon g(K, K)]$ ,  $\lambda > 0$  small enough, the  $g$ -geodesic  $\gamma_C$  cuts the orbits  $x = \zeta_0$  and  $x = \zeta_1$  of  $K$ . Now  $f_n(\zeta_{0,1}^n)$  converges to  $f(\zeta_{0,1})$ , and  $\sup_B \epsilon g_n(K_n, K_n)$  converges to  $\sup_B \epsilon g(K, K)$ ; this ensures the existence of  $\Lambda > 0$  such that for  $n$  big enough, we have  $C_n^2 > \Lambda + \sup(\epsilon f_n(\zeta_0^n), \epsilon f_n(\zeta_1^n))$ . Set  $t = 0$  at the point where  $\gamma_n$  is tangent to  $K_n$  in the torus, and denote by  $t_0^n, t_1^n$  the smallest positive reals such that  $\beta_n^2(t_0^n) = \beta_n^2(t_1^n) = C_n^2$ , and  $t_{\zeta_0}^n, t_{\zeta_1}^n$  the smallest positive reals such that  $\kappa_n(t_{\zeta_0}^n) = \kappa_n(t_{\zeta_1}^n) = 0$ . There are four cases :

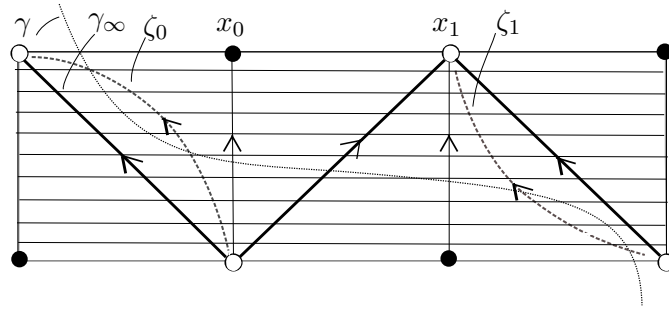


FIGURE 4.1 –  $\zeta_0 < x_0 < x_1 < \zeta_1$ , i.e.  $t_{\zeta_0}^n < t_0^n < \omega_n < t_1^n < t_{\zeta_1}^n$

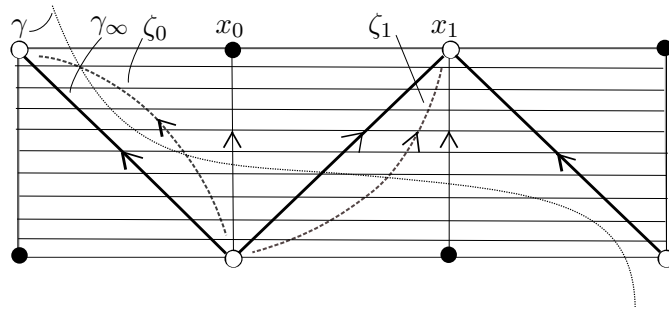


FIGURE 4.2 –  $\zeta_0 < x_0 < \zeta_1 < x_1$ , i.e.  $t_{\zeta_0}^n < t_0^n < \omega_n < t_{\zeta_1}^n < t_1^n$

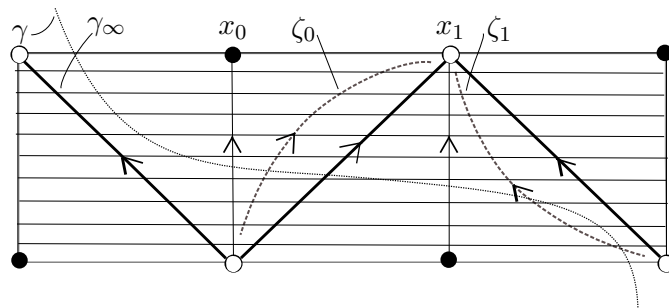


FIGURE 4.3 –  $x_0 < \zeta_0 < x_1 < \zeta_1$ , i.e.  $t_0^n < t_{\zeta_0}^n < \omega_n < t_1^n < t_{\zeta_1}^n$

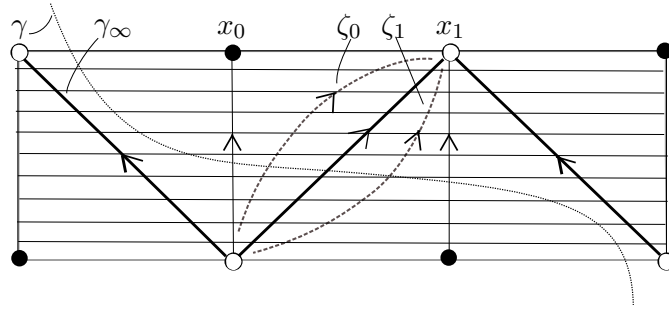


FIGURE 4.4 –  $x_0 \leq \zeta_0 < \zeta_1 \leq x_1$ , i.e.  $t_0^n \leq t_{\zeta_0^n} < \omega_n < t_{\zeta_1^n} \leq t_1^n$

We first prove that the two sequences  $(t_{\zeta_1^n} - t_{\zeta_0^n})_n$  and  $(t_1^n - t_0^n)_n$  are bounded. For this purpose, write

$$t_{\zeta_1^n} - t_{\zeta_0^n} = \int_{\zeta_0^n}^{\zeta_1^n} \frac{1}{\sqrt{C_n^2 - \epsilon f_n(x_n)}} dx_n.$$

Let  $\mathcal{N}$  be a neighborhood of  $(g, p)$  in  $\mathcal{L}_K(T) \times T$  in which we have  $C_n^2 > \Lambda + \sup(\epsilon f_n(\zeta_0^n), \epsilon f_n(\zeta_1^n))$ . For all  $x \in [\zeta_0, \zeta_1]$ , we have

$$C^2 - \epsilon f(x) \geq \inf\{C^2 - \epsilon f(\zeta_0), C^2 - \epsilon f(\zeta_1)\} = C^2 - \sup\{\epsilon f(\zeta_0), \epsilon f(\zeta_1)\},$$

hence, for metrics in  $\mathcal{N}$ , we get

$$\begin{aligned} t_{\zeta_1^n} - t_{\zeta_0^n} &= \int_{\zeta_0^n}^{\zeta_1^n} \frac{1}{\sqrt{C_n^2 - \epsilon f_n(x_n)}} dx_n \leq \int_{\zeta_0^n}^{\zeta_1^n} \frac{1}{\sqrt{C_n^2 - \sup(\epsilon f_n(\zeta_0^n), \epsilon f_n(\zeta_1^n))}} dx_n \\ &\leq (\zeta_1^n - \zeta_0^n) \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}. \end{aligned}$$

Restricting to a subset of  $\mathcal{N}$  if necessary, we can find a constant  $A > 0$  such that  $t_{\zeta_1^n} - t_{\zeta_0^n} \leq A$  on this subset. It follows that when  $n$  tends to infinity, the difference  $t_{\zeta_1^n} - t_{\zeta_0^n}$  is bounded, even if  $t_{\zeta_0^n}$  and  $t_{\zeta_1^n}$  go to infinity. Similarly, write

$$t_1^n - t_0^n = \int_{x_0^n}^{x_1^n} \frac{1}{\sqrt{C_n^2 - \epsilon f_n(x_n)}} dx_n \leq (x_1^n - x_0^n) \frac{1}{\sqrt{C_n^2}}.$$

Using that  $C_n$  is bounded away from zero establishes that  $t_1^n - t_0^n$  is bounded, which is our assertion.

Our next claim is that  $c_n(t_{\zeta_1^n}) > 0$ , provided  $n$  is large enough. The solution  $c_n$  is convex for  $t \in [0, t_{\zeta_0^n}]$ . Denote by  $\tau_n$  and  $\theta_n$  the smallest positive reals such that  $c_n(\tau_n) = 0$  and  $c'_n(\theta_n) = 0$ . Suppose the claim were false. Then we could find a sequence  $(n_i)_i \rightarrow \infty$  such that  $\forall i, \tau_{n_i} \leq \zeta_1^{n_i}$ . We have  $\beta_{n_i}(t) = \beta'_{n_i}(0)s_{n_i}(t)$ ; write  $\epsilon\beta'(t) = \frac{1}{2}f'(x(\gamma(t)))$ , it appears that  $\beta'_{n_i}(0) \rightarrow 0$  when  $i \rightarrow \infty$ . Using  $\langle K_n, K_n \rangle = \epsilon(C_n^2 - \beta_n^2)$ , we get

$$s_{n_i}(t_{\zeta_0^{n_i}}) = \frac{C_{n_i}^2 - \epsilon f_{n_i}(\zeta_0^{n_i})}{\beta'_{n_i}(0)} \quad \text{and} \quad s_{n_i}(t_{\zeta_1^{n_i}}) = \frac{C_{n_i}^2 - \epsilon f_{n_i}(\zeta_1^{n_i})}{\beta'_{n_i}(0)}$$

that tend to infinity when  $i$  goes to infinity. It follows that  $s_{n_i}(\tau_{n_i}) \rightarrow \infty$ ; using  $c_n s'_n - c'_n s_n = 1$ , this yields  $c'_{n_i}(\tau_{n_i}) \rightarrow 0$ . Now, since  $\kappa_{n_i}$  has constant sign between  $\theta_{n_i}$  and  $\zeta_1^{n_i}$ ,

$|c'_{n_i}(t)|$  reaches its maximal value at  $t = \tau_{n_i}$ ; this gives for all  $t \in [\theta_{n_i}, \zeta_1^{n_i}]$ ,  $|c'_{n_i}(t)| \leq |c'_{n_i}(\tau_{n_i})|$ . From the mean value theorem, there exists  $\mathbf{a}_i \in [\theta_{n_i}, \zeta_1^{n_i}]$  such that  $c_{n_i}(\theta_{n_i}) - c_{n_i}(\zeta_1^{n_i}) = c'_{n_i}(\mathbf{a}_i)(\theta_{n_i} - \zeta_1^{n_i})$ . Since  $\theta_{n_i} - \zeta_1^{n_i}$  is uniformly bounded, we can make  $c_{n_i}(\theta_{n_i}) - c_{n_i}(\zeta_1^{n_i})$  the smallest possible by setting  $i$  large enough. Now from  $c_{n_i}(\theta_{n_i}) > c_{n_i}(0) = 1$ , we see that provided  $i$  is large enough,  $c_{n_i}(\zeta_1^{n_i}) > 0$ , so  $c_{n_i}$  does not vanish on  $[0, \zeta_1^{n_i}]$ , contrary to our assumption. This gives  $c_n(t_0^n) > 0$  for  $n$  large enough, and in the cases (1) and (3), we also get  $c_n(t_1^n) > 0$ , making  $c_n(t_0^n) + c_n(t_1^n)$  positive near the boundary.

We are left with the cases (2) and (4). We already know that  $c_n(t_{\zeta_1^n}) > 0$  near the boundary, and want to prove that  $c_n(t_1^n) > 0$ . We look at the set  $A = \{c_n(t_1^n), c_n(t_1^n) < 0\}$ . If  $A$  is finite, there is nothing to do; if it is infinite, denote its elements by  $\{c_{n_i}(t_1^{n_i})\}$  and write  $c_{n_i}(t_1^{n_i}) - c_{n_i}(\tau_{n_i}) = c'_{n_i}(\mathbf{a}_i)(t_1^{n_i} - \tau_{n_i})$ , where  $\mathbf{a}_i \in [\tau_{n_i}, t_1^{n_i}]$ . We have  $0 \geq c'_{n_i}(t_1^{n_i}) = \frac{c_{n_i}(t_1^{n_i})s'_{n_i}(t_1^{n_i})-1}{s_{n_i}(t_1^{n_i})} > -\frac{1}{s_{n_i}(t_1^{n_i})}$ . Like before,  $s_{n_i}(t_1^{n_i})$  goes to infinity when  $i \rightarrow \infty$ , hence  $c'_{n_i}(t_1^{n_i}) \rightarrow 0$ . Now, since  $|c'(t)| \leq |c'_{n_i}(t_1^{n_i})|$ ,  $\forall t \in [\tau_{n_i}, t_1^{n_i}]$  and  $t_1^{n_i} - \tau_{n_i}$  is bounded, we can make  $|c_{n_i}(t_1^{n_i})|$  the smallest possible. The proof is completed by observing that actually  $c_n(t_0^n) > 1$  for  $n$  sufficiently large. To do this, consider the set  $B = \{c_n(t_0^n), t_0^n > \theta_n\}$ . If  $B$  is finite, the assertion follows, for  $c_n$  is an increasing function on  $[0, \theta_n]$ . In the same manner, if  $B$  is infinite, we exploit the fact that  $c_n(t_0^n)$  is positive, and make it the closest possible to  $c_n(\theta_{n_i})$ . Since  $c_n(\theta_{n_i}) > 1$ , the conclusion follows.  $\square$

**Theorem 4.2.23.** *Let  $(T, K)$  be a torus in the family given in Theorem 3.3.19. We exclude the case in which there are open sets of constant curvature. Assume  $f$  satisfies the following conditions :*

- (1)  $\kappa$  has simple zeros;
- (2) There is only one critical orbit of  $K$  in each band of the torus;
- (3) For  $\epsilon = \pm 1$ , there exists  $x_0$  in which  $f$  has sign  $\epsilon$ , such that :

$$-\epsilon f''(x_0) \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{M_\epsilon - \epsilon f(x)}} \right)^2 < 2\pi^2,$$

and

$$\epsilon f''(x_{cr}^{-\epsilon}) \left( \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{dx}{\sqrt{\epsilon f(x_0) - \epsilon f(x)}} \right)^2 < 2\pi^2,$$

where  $x_{cr}^{-\epsilon}$ ,  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$ ,  $x_1$  and  $M_\epsilon$  are as in propositions 4.2.20 and 4.2.21.

Then, there is a neighborhood  $\mathcal{N}$  of the torus in  $\mathcal{L}_K(T)$  such that the metrics in  $\mathcal{N} \cap S\mathcal{L}_K(T)$  have no conjugate points, whereas the others admit conjugate points.

*Démonstration.* Denote by  $g_0$  the metric on  $T$ ;  $g_0$  has no conjugate points. The assumptions on  $g_0$  imply that a neighborhood of  $g_0$  in  $\mathcal{L}_K(T)$  can be taken in  $\mathcal{L}_K^*(T)$ . By propositions 4.2.20 and 4.2.21, conditions (1) and (3) imply that the extended function  $\mathcal{Z}(g_0)$  is strictly positive on the open set

$$\tilde{\Omega}(g_0) = \{p \in T, g_0(\nabla_{K_0} K_0, \nabla_{K_0} K_0)(p) \neq 0\}.$$

Therefore, there exists a neighborhood of any compact subset of  $\tilde{\Omega}(g_0)$  in

$$\tilde{\Omega}(g) = \{(g, p) \in S\mathcal{L}_K^*(T) \times T, g(\nabla_K K, \nabla_K K)(p) \neq 0\}$$



on which  $\mathcal{Z}$  is positive. Thus, we get a neighborhood  $V$  of  $g_0$  in  $\mathcal{L}_K^*(T)$  such that  $\mathcal{Z}$  is positive on  $SV \times F$ , where  $SV = V \cap S\mathcal{L}_K^*(T)$  and  $F$  is a compact subset of  $T$  not containing the critical orbits of  $K_0$ . We can make this compact subset the closest possible to the boundary. Now, the condition  $f' f''' \leq 0$ , combined with (1), implies that  $\kappa$  has exactly two simple zeros in the smallest period of  $f$ . Besides, these zeros cannot be on the extremums of  $f$  unless the torus is flat (see the proof of Lemma 4.2.19). Therefore, Lemma 4.2.22 provides a neighborhood  $V'$  of  $g_0$  in  $\mathcal{L}_K(T)$  such that  $\mathcal{Z}$  is positive on  $V' \times U$ ,  $U$  being a neighborhood of the critical orbits of  $K_0$  in the torus. Taking  $V \cap V'$  achieves the proof. □

Theorem 4.2.23 gives a way to obtain examples of Lorentzian metrics on  $T$  with no conjugate points, that are stable by deformation in  $S\mathcal{L}_K^*(T)$ . Here are a few examples :

- . The Clifton-Pohl torus, corresponding to  $f(x) = \sin(2x)$ ;
- .  $f(x) = \frac{\sin(x)}{10 + \sin(x)}$ ;
- .  $f(x) = \ln(2 + \sin x)$ ;
- .  $f(x) = \cos(\sin(x)) - 3/4$ ;
- .  $f(x) = \text{JacobiSD}(x, 1/2)$ ;
- .  $f(x) = \text{JacobiSN}(x, 1/4)$ .

The verification of hypothesis (3) of Theorem 4.2.23 is done numerically.

**Remarque 4.2.24.** *The quadratic variations of the Clifton-Pohl torus are also stable by deformation in  $S\mathcal{L}_K^*(T)$ ; this comes from an explicit resolution of the Jacobi equation.*



# Bibliographie

- [1] L. Andersson, M. Dahl, and R. Howard. Boundary and lens rigidity of Lorentzian surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(6) :2307–2329, 1996.
- [2] C. Bavard and P. Mounoud. Sur les surfaces lorentziennes compactes sans points conjugués. *Geom. Topol.*, 17(1) :469–492, 2013.
- [3] C. Bavard and P. Mounoud. Extensions maximales et classification des tores lorentziens munis d’un champ de killing. *arXiv : 1510.01253*, 2016.
- [4] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and K. L. Easley. *Global Lorentzian geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, second edition, 1996.
- [5] P. R. Beesack and B. Schwarz. On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. *Canadian J. Math.*, 8 :504–515, 1956.
- [6] A. L. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.
- [7] S. Breuer and D. Gottlieb. Upper and lower bounds on eigenvalues of Sturm-Liouville systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 36 :465–476, 1971.
- [8] D. Burago and S. Ivanov. Riemannian tori without conjugate points are flat. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3) :259–269, 1994.
- [9] Y. Carrière. Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines. *Invent. Math.*, 95(3) :615–628, 1989.
- [10] Y. Carrière and L. Rozoy. Complétude des deux-tors lorentziens. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 12, Année 1993–1994*, volume 12 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 19–24. Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d’Hères, 1994.
- [11] Y. Carrière and L. Rozoy. Complétude des métriques lorentziennes de  $T^2$  et difféomorphismes du cercle. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 25(2) :223–235, 1994.
- [12] J. Cheeger and D. G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2008. Revised reprint of the 1975 original.

- [13] D. J. Collins, R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov, and H. Zieschang. *Combinatorial group theory and applications to geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1990 Russian original by P. M. Cohn, Reprint of the original English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences [It Algebra. VII, Encyclopaedia Math. Sci., 58, Springer, Berlin, 1993 ; MR1265269 (95g :57004)].
- [14] C. Godbillon. Fibrés en droites et feuilletages du plan. *Enseignement Math. (2)*, 18 :213–224 (1973), 1972.
- [15] C. Godbillon and G. Reeb. Fibrés sur le branchement simple. *Enseignement Math. (2)*, 12 :277–287, 1966.
- [16] L. Green and R. Gulliver. Planes without conjugate points. *J. Differential Geom.*, 22(1) :43–47, 1985.
- [17] M. Guediri and J. Lafontaine. Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes. *J. Geom. Phys.*, 15(2) :150–158, 1995.
- [18] M. Gutiérrez, F. J. Palomo, and A. Romero. Lorentzian manifolds with no null conjugate points. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 137(2) :363–375, 2004.
- [19] A. Haefliger and G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseignement Math. (2)*, 3 :107–125, 1957.
- [20] J. Lafuente López. A geodesic completeness theorem for locally symmetric Lorentz manifolds. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 1(1-3) :101–110, 1988.
- [21] A. B. Mingarelli. A survey of the regular weighted Sturm-Liouville problem—the nondefinite case. In *International workshop on applied differential equations (Beijing, 1985)*, pages 109–137. World Sci. Publishing, Singapore, 1986.
- [22] P. Mounoud. Projective properties of lorentzian surfaces. *arXiv : 1610.01408*, 2016.
- [23] S. B. Myers. Riemannian manifolds with positive mean curvature. *Duke Math. J.*, 8 :401–404, 1941.
- [24] B. O’Neill. Semi-riemannian geometry, with applications to relativity. *Pure and Applied Math*, 103, 1983.
- [25] P. Piccione, A. Portaluri, and D. V. Tausk. Spectral flow, Maslov index and bifurcation of semi-Riemannian geodesics. *Ann. Global Anal. Geom.*, 25(2) :121–149, 2004.
- [26] R. G. D. Richardson. Contributions to the Study of Oscillation Properties of the Solutions of Linear Differential Equations of the Second Order. *Amer. J. Math.*, 40(3) :283–316, 1918.
- [27] A. Romero and M. Sánchez. On the completeness of geodesics obtained as a limit. *J. Math. Phys.*, 34(8) :3768–3774, 1993.

- [28] A. Romero and M. Sánchez. New properties and examples of incomplete Lorentzian tori. *J. Math. Phys.*, 35(4) :1992–1997, 1994.
- [29] R. O. Ruggiero. *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*, volume 12 of *Ensaio Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.
- [30] M. Sánchez. Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(3) :1063–1080, 1997.